

Simulační model a aplikace pokročilých algoritmů pro řízení kvadrotéry na pojezdu se zavěšeným břemenem

Vendula Hovorková*¹

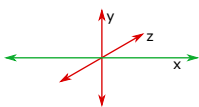
¹ ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav přístrojové a řídicí techniky, Technická 4, 166 07 Praha 6, Česká republika

Abstrakt

Práce se zabývá řízením kvadrotéry s jedním stupněm volnosti se zavěšeným břemenem, jehož cílem je eliminovat kmitání břemene při pohybu kvadrotéry. Omezení stupňů volnosti je zajištěno připevněním kvadrotéry k vozíku pohybujícímu se po lineárním vedení. Je odvozen matematický model systému, který je následně převeden na model ve stavové formulaci. Linearizovaný model ve stavové formulaci je použit pro analýzu dynamických vlastností a návrh regulátoru pro řízení náklonu kvadrotéry. Pro kompenzaci kmitů břemene je využito tvarovače signálu. Pro simulaci a vizualizaci systému je využito programového prostředí Matlab/Simulink.

Klíčová slova: stavový popis; 2DOF PID regulátor; tvarovač signálu

1. Úvod



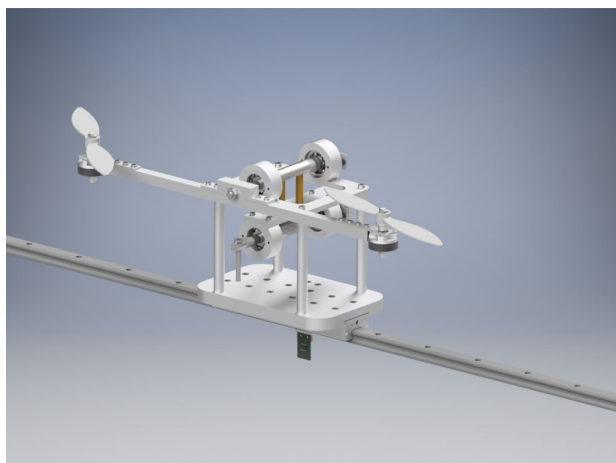
Obr. 1. Omezení pohybu koptéry

Tělo koptéry tvoří rameno s dvěma motory a dvě horizontální osy. První osou je koptéra připojena k vozíku, který je umístěn na rámové konstrukci tvořící lineární vedení. Tímto způsobem je pohyb koptéry omezen pouze do jednoho směru (viz Obr. 1). Druhá osa spojuje tělo koptéry a závěs, na jehož konci je závaží.

Rozdíl sil vyvozených motory určuje směr a rychlost pohybu koptéry. Vlivem změn pohybového stavu koptéry dochází k rozkmitání závěsu se závažím, tento jev však není žádoucí. Navržené řízení s tvarováním vstupního signálu toto kmitání kompenzuje.

2. Mechanický model

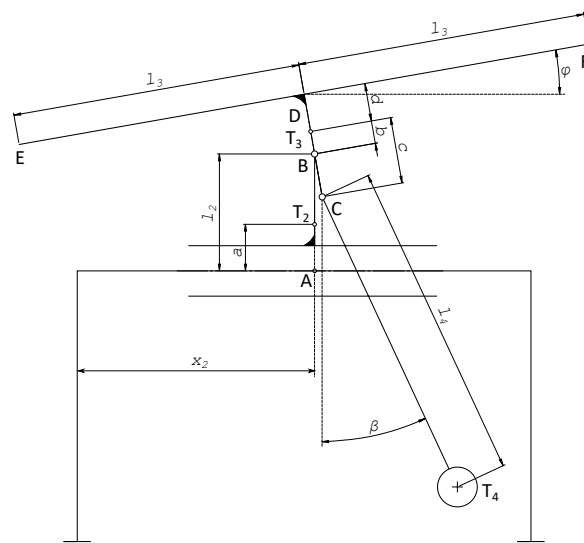
V první fázi tvorby matematicko-fyzikálního modelu systému je třeba vzít v úvahu reálnou konstrukci (viz CAD model na Obr. 2) a postupným zjednodušením vytvořit mechanický model. Mezi zjednodušení patří



Obr. 2. CAD model koptéry

uvažování hlavních částí jako ideálně tuhá tělesa. Dále je zanedbána hmotnost závěsu nesoucí závaží.

Mechanický model představuje schéma na Obr. 3. Tělesa jsou zakreslena zjednodušeným způsobem. Jsou vyznačeny důležité body: středy hmotností jednotlivých těles, body spojení těles a působíště sil motorů na koncích ramene. Rozměry jednotlivých úseků jsou definovány jako parametry.



Obr. 3. Mechanický model koptéry s rozměry

Dále jsou na schématu vyznačeny souřadnice těles vzhledem k souřadnicovému systému rámu:

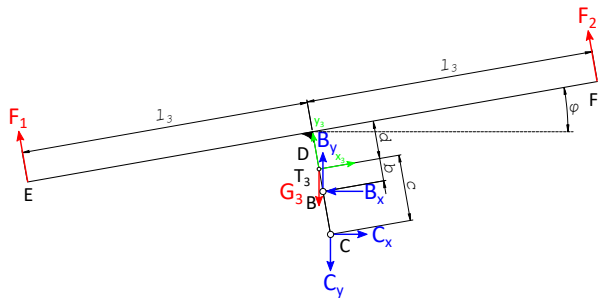
- x_2 poloha středu vozíku vzhledem k počátku rámu
- φ úhlová výchylka ramene s motory vzhledem k horizontální ose
- β úhlová výchylka závěsu závaží vzhledem k vertikální ose

Tělesa byla očíslována v pořadí 2 – vozík, 3 – tělo koptéry a 4 – závaží (1 odpovídá rámu). Parametry modelu byly předběžně nastaveny dle Tab. 1.

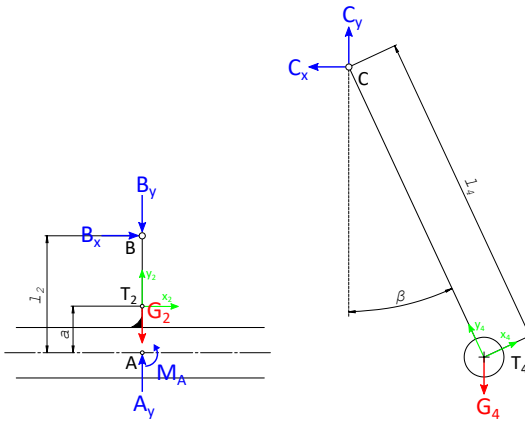
*Kontakt na autora: Vendula.Hovorkova@fs.cvut.cz

Tabulka 1. Parametry modelu

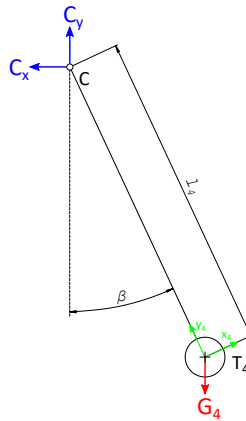
hmotnosti (kg)		vzdálenosti (mm)			
m_2	0.732	a	51	l_2	134
m_3	0.431	b	-26	l_3	165
m_4	2	c	25	l_4	400
součinitele tření (-)		momenty setrvačnosti ($kg\ m^2$)			
c_φ	0.00001	I_2	0.0032		
c_x	0.3	I_3	0.0027		
c_β	0.00001	I_4	0.0		



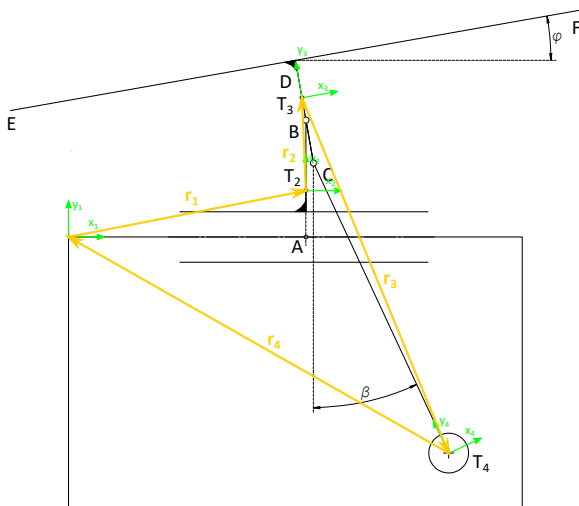
(a) rameno s motory



(b) vozík



(c) tyč s břemenem

Obr. 4. Uvolnění jednotlivých těles soustavy

Obr. 5. Vektorová smyčka

Druhým krokem po získání mechanického modelu je uvolnění jednotlivých těles (viz Obr. 4). Pro každé těleso je vytvořeno schéma s vyznačeným lokálním souřadnicovým systémem a působícími silami – reakcemi v místě uvolněných vazeb, tíhovými silami a silami motorů. Na základě schémat jsou sestaveny Newton-Eulerovy (N-E) pohybové rovnice pro tělesa v lokálních souřadnicových systémech.

Pro transformaci souřadnic do globálního systému souřadnic (spojeného s rámem) je použita vektorová metoda. Soustavě je přiřazena jedna smyčka spojující počátek globálního souřadnicového systému a počátky těch lokálních (viz Obr. 5).

Vektory lze vyjádřit pomocí rozměrových parametrů a souřadnic x_2 , φ a β . Pomocí vektorů je pak vyjádřena poloha těles vztahena k rámu. První a druhou derivací jsou získány též rychlosti a zrychlení jednotlivých těles vzhledem k rámu. Tyto polohy, rychlosti a zrychlení jsou poté dosazeny do N-E rovnic a vyloučením reakcí jsou získány vlastní pohybové rovnice. Po převedení do maticového tvaru je získán nelineární dynamický model v následující podobě:

$$M(t)\ddot{\mathbf{x}}(t) + C(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + K(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{Q}(t) = L(t)\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\text{kde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varphi \\ x_2 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Nelineární model (1) je použit pro sestavení simulačního modelu a je pomocí něho odvozen také model ve stavové formulaci. Pro některé pozdější výpočty je pak použit linearizovaný dynamický model (2). Linearizace byla provedena pro nulové počáteční podmínky.

$$M_{lin}\ddot{\mathbf{x}}(t) + C_{lin}\dot{\mathbf{x}}(t) + K_{lin}\mathbf{x}(t) = L_{lin}\mathbf{u}(t) \quad (2)$$

kde

$$M_{lin} = \begin{bmatrix} I_3 + b^2 m_3 + (c-b)^2 m_4 & -b m_3 + (c-b)m_4 & l_4(c-b)m_4 \\ -b m_3 + (c-b)m_4 & m_2 + m_3 + m_4 & l_4 m_4 \\ l_4(c-b)m_4 & l_4 m_4 & I_4 + m_4 l_4^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{lin} = \begin{bmatrix} -b g m_3 + (c-b) g m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_4 g m_4 \end{bmatrix}$$

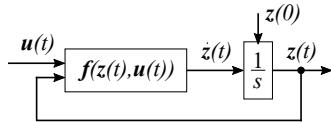
$$C_{lin} = \begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & c_x & 0 \\ 0 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad L_{lin} = \begin{bmatrix} -l_3 & l_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Stavová formulace modelu

3.1. Nelineární model ve stavové formulaci

Stavové veličiny plně popisující systém byly zvoleny následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi & z_4 &= \dot{z}_3 = \dot{x}_2 \\ z_2 &= \dot{z}_1 = \dot{\varphi} & z_5 &= \beta \\ z_3 &= x_2 & z_6 &= \dot{z}_5 = \dot{\beta} \end{aligned}$$



Obr. 6. Struktura stavového modelu

Jejich dosazením do nelineárního dynamického modelu (1) a postupným vyjádřením (za pomoci Matlab skriptu) je získána stavová vektorová rovnice (3). Vyjadřuje vztah mezi stavem systému a vstupy. Její grafická podoba je znázorněna na Obr. 6 [1].

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) \quad (3)$$

kde

$z(t) = [z_1(t) \ \dots \ z_6(t)]^T$ je vektor stavových veličin

$u(t) = [F_1(t) \ F_2(t)]^T$ je vektor vstupů

3.2. Lineární model ve stavové formulaci

Lineární aproximace vektorové funkce f je provedena použitím Jacobiho matice. Ta obsahuje parciální derivace jednotlivých složek funkce f nejprve podle stavových veličin z_1, z_2, \dots, z_6 a poté podle vstupů F_1 a F_2 – viz (4).

$$J_{fz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_6} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial z_1} & \frac{\partial f_6}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_6}{\partial z_6} \end{bmatrix} \quad J_{fu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial F_1} & \frac{\partial f_1}{\partial F_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial F_1} & \frac{\partial f_2}{\partial F_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial F_1} & \frac{\partial f_6}{\partial F_2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Pracovní bod P byl zvolen pro nulové hodnoty pro každou stavovou proměnnou i velikost obou sil. Lineární dynamický model ve stavové formulaci má podobu stavové vektorové rovnice (5) a výstupní rovnice (6).

$$\dot{z}(t) = \mathbf{A}z(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (5)$$

kde $\mathbf{A} = J_{fz} |_P$ a $\mathbf{B} = J_{fu} |_P$

$$y(t) = \mathbf{C}z(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (6)$$

Číselně vypadají matice následovně:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -385.1557 & -0.0035 & 0 & 1.0025 & 281.4657 & 0.0004 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 3.7111 & 0.0000 & 0 & -0.2676 & 14.1581 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 39.8295 & 0.0004 & 0 & 0.5412 & -95.8072 & -0.0001 \end{bmatrix}$$

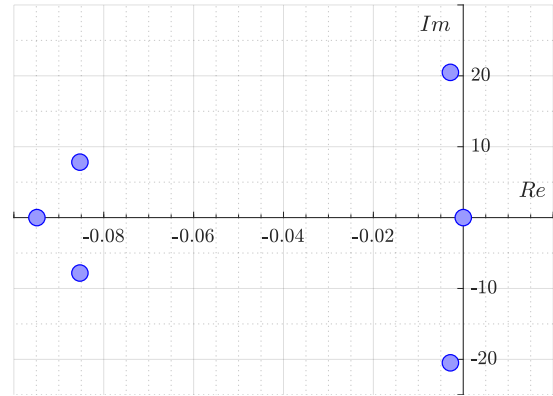
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -57.2245 & 57.2245 \\ 0 & 0 \\ 0.5514 & -0.5514 \\ 0 & 0 \\ 5.9177 & -5.9177 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{D} = [0 \ 0]$$

4. Analýza dynamických vlastností

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.0000 + 0.0000j \\ -0.0029 + 20.4881j \\ -0.0029 - 20.4881j \\ -0.0853 + 7.8216j \\ -0.0853 - 7.8216j \\ -0.0949 + 0.0000j \end{bmatrix} \quad (7)$$

Vektor \mathbf{r} obsahuje vlastní čísla matice \mathbf{A} . Jejich vykreslením v komplexní rovině je získán Obr. 7. Systém je kmitavý a nachází se na mezi stability.



Obr. 7. Vlastní čísla \mathbf{r} matice \mathbf{A} v komplexní rovině

5. Návrh regulátoru

5.1. 2DOF PID regulátor

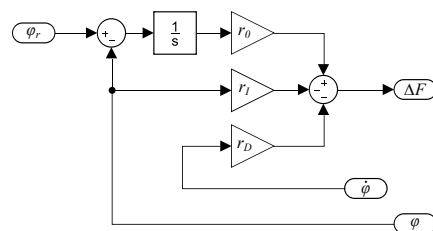
Úhel náklonu ramene s motory – pitch úhel φ – je určen rozdílem velikostí tažných sil motorů – ΔF . Pro řízení tohoto rozdílu je navržen PID regulátor s dvěma stupni volnosti (2DOF PID). Obecnou rovnici pro výstup 2DOF PID regulátoru představuje (8).

$$u(t) = r_0 (\bar{b} w(t) - y(t)) + r_I \int_0^t (w(\tau) - y(\tau)) d\tau + r_D \frac{d(\bar{c} w(t) - y(t))}{dt} \quad (8)$$

kde koeficienty $\bar{b}, \bar{c} \in [0, 1]$, $u(t)$, $w(t)$, $y(t)$ jsou v pořadí akční, řídicí, regulovaná veličina a r_0, r_I, r_D jsou parametry regulátoru [2].

Volbou nulových parametrů \bar{b} a \bar{c} a nahrazením obecných veličin veličinami vztahujícími se k řízení pitch úhlu je získána rovnice (9). Implementaci regulátoru v prostředí Simulink pak znázorňuje Obr. 8.

$$\Delta F(t) = -r_0 \varphi(t) + r_I \int_0^t (\varphi_r(\tau) - \varphi(\tau)) d\tau - r_D \dot{\varphi}(t) \quad (9)$$



Obr. 8. PID regulátor s dvěma stupni volnosti

5.2. SISO model

Lineární model popsany v (5) a (6), který má dva vstupy F_1 a F_2 , je třeba upravit na model typu SISO (single input single output), tedy model s jediným vstupem, kterým je zvolen rozdíl velikostí sil motorů ΔF .

Člen stavové vektorové rovnice (5) lze upravit:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) &= [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}_1 F_1 + \mathbf{b}_2 F_2 = \\ &= \mathbf{b}_1 (F_0 - \frac{1}{2} \Delta F) + \mathbf{b}_2 (F_0 + \frac{1}{2} \Delta F) = \\ &= (-\frac{1}{2} \mathbf{b}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_2) \Delta F + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) F_0 = |\mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_2| = \\ &= \mathbf{b}_2 \Delta F \end{aligned} \quad (10)$$

Zavedením substituce $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$ dostává stavová vektorová rovnice tvar:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}\Delta F \quad (11)$$

Za předpokladu kladné výchylky φ při kladném ΔF jsou pak tažné síly motorů:

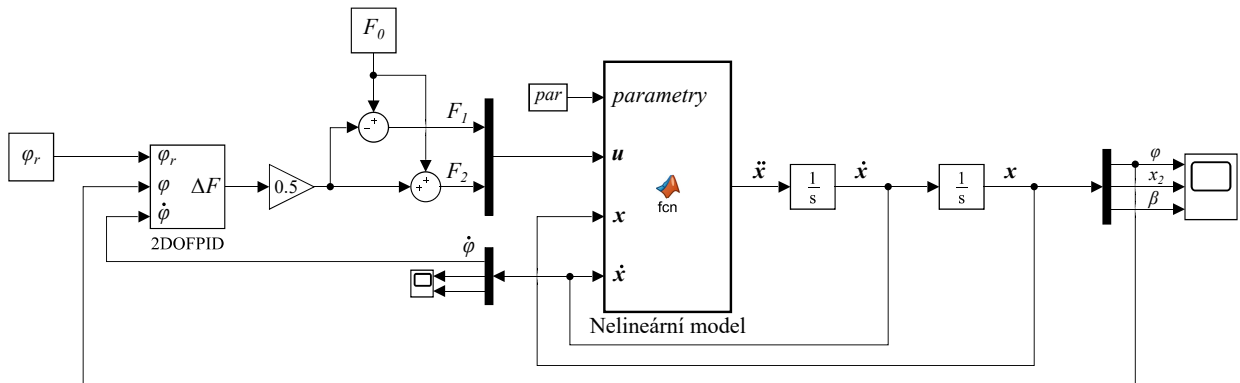
$$F_1 = F_0 - \frac{1}{2} \Delta F \quad (12)$$

$$F_2 = F_0 + \frac{1}{2} \Delta F \quad (13)$$

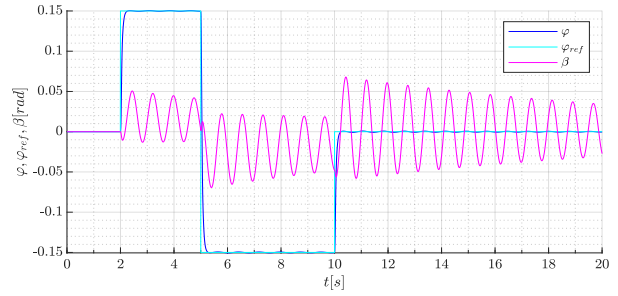
kde F_0 je počáteční parametr síly vyvíjené motorem.

Návrh parametrů regulátoru je proveden na základě lineárního SISO modelu ve stavové formulaci (11) pomocí nástroje Matlab Sisotool – Root Locus Editor. Naladěné parametry jsou: $r_0 = 155.1596$, $r_I = 2802.8$, $r_D = 2.0936$.

Kompletní Simulink model řízeného modelu zobrazuje Obr. 9. Jak dobře úhel φ sleduje žádanou veličinu φ_r je možno vidět na Obr. 10.



Obr. 9. Simulink model s řízením pitch úhlu pomocí 2DOF PID regulátoru



Obr. 10. Časový průběh úhlových výchylek φ (vzhledem k φ_r) a β – řízený model bez tvarovače

6. Rozšířený stavový popis

Před aplikací algoritmu tvarování signálu je třeba upravit model ve stavové formulaci tak, aby zahrnoval celý systém včetně nově navrženého regulátoru. To znamená do modelu (11) dosadit předpis pro výstupní veličinu regulátoru (9). Nejprve je zavedena substituce:

$$I = \int_0^t (\varphi_r - \varphi) d\tau \quad (14)$$

Rovnice (9) tedy přejde do tvaru:

$$\Delta F = r_I I - r_0 \varphi - r_D \dot{\varphi} \quad (15)$$

Rozšířený stavový vektor je poté zaveden:

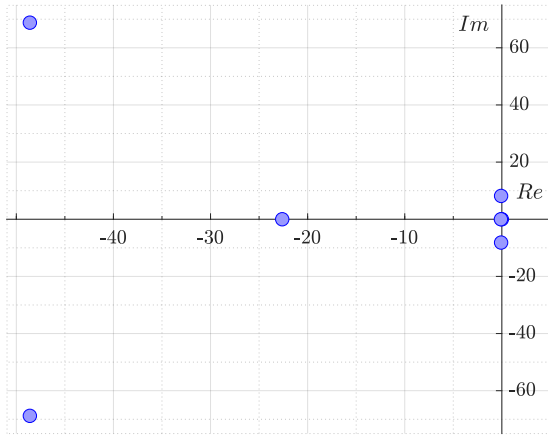
$$\bar{\mathbf{z}} = [z_1 \quad \dots \quad z_6 \quad I]^T \quad (16)$$

Následně použitím obdobného postupu jako v odstavci 3.2. je získána rovnice (17) – lineární dynamický model ve stavové formulaci pro řízený systém.

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}} = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{z}} + \bar{\mathbf{b}} \varphi_r \quad (17)$$

Vlastní čísla nově vzniklé matice $\bar{\mathbf{A}}$ – póly systému – jsou obsažena ve vektoru $\bar{\mathbf{r}}$ (grafické znázornění je na Obr. 11):

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0.0000 + 0.0000j \\ -48.6064 + 68.7977j \\ -48.6064 - 68.7977j \\ -22.6179 + 0.0000j \\ -0.0765 + 8.1631j \\ -0.0765 - 8.1631j \\ -0.0949 + 0.0000j \end{bmatrix} \quad (18)$$



Obr. 11. Vlastní čísla \bar{r} matice \bar{A} v komplexní rovině

Systém je kmitavý a na mezi stability. Kmitavý mód závaží na závěsu je určen dvojicí pólů:

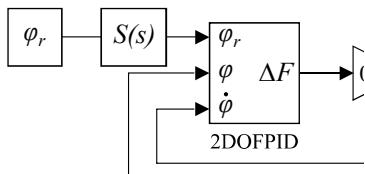
$$\begin{aligned} \bar{r} &= -0.0765 \pm 8.1631j = -\bar{\beta} \pm j\Omega = \\ &= -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2} \end{aligned} \quad (19)$$

kde ζ je tlumení a ω vlastní frekvence kmitání [3].

Perioda kmitání $T = \frac{2\pi}{\Omega} \doteq 0.77$ s odpovídá průběhu kmitání úhlu β v grafu na Obr. 10.

7. Tvarování vstupního signálu

7.1. DeZV tvarovač



Obr. 12. DeZV tvarovač jako filtr řídicí veličiny

D_eZV tvarovač (Zero vibrations shaper with distributed delays) neboli tvarovač nulových vibrací s distribuovaným zpožděním je pokročilejší forma tvarovače signálu s přenosovou funkcí [3]:

$$S(s) = A + (1 - A) \frac{1 - e^{-sT}}{Ts} e^{-s\tau} \quad (20)$$

kde T je hodnota pro distribuované zpoždění a τ hodnota pro soustředěné zpoždění. Pro jednotlivé parametry tvarovače platí rovnice (21) – (25).

$$T \in \left(0, \frac{\pi}{\Omega}\right) \quad (21)$$

$$\tau = \frac{\pi + \bar{\varphi}}{\Omega} \quad (22)$$

$$A = \frac{me^{\frac{\bar{\beta}}{\Omega}(\pi + \bar{\varphi})}}{1 + me^{\frac{\bar{\beta}}{\Omega}(\pi + \bar{\varphi})}} \quad (23)$$

$$m = \left| \frac{1 - e^{-sT}}{Ts} \right| \quad (24)$$

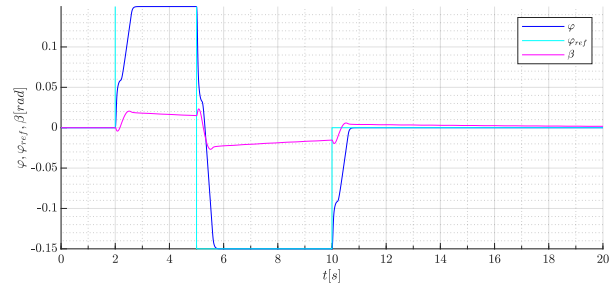
$$\bar{\varphi} = \arg \left(\frac{1 - e^{-sT}}{Ts} \right) \quad (25)$$

Vypočtené hodnoty jsou uvedeny v Tabulce 2.

Tabulka 2. Parametry D_eZV tvarovače

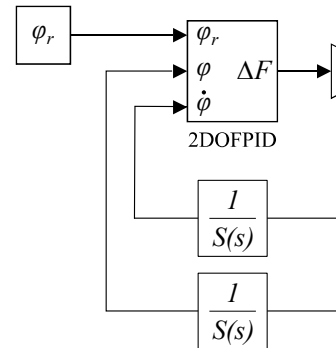
T	0.3849	s
τ	0.1913	s
A	0.3960	

V grafu na Obr. 13 lze pozorovat, jak došlo k eliminaci kmitání závaží.



Obr. 13. Časový průběh úhlových výchylek φ (vzhledem k φ_r) a β – DeZV tvarovač

7.2. Inverzní tvarovač



Obr. 14. Inverzní tvarovač ve zpětné vazbě

Inverzní tvarovač se umísťuje do zpětné vazby regulačního obvodu. Pro výpočet jeho parametrů je nejprve třeba určitým postupem izolovat kmitavý mód, který má tvarovač za cíl eliminovat. Výchozím je lineární dynamický model (2). Za předpokladu, že matice M_{lin} je regulární, lze model upravit na tvar [3]:

$$\ddot{x} = E\dot{x} + Fx + \bar{B}u \quad (26)$$

kde

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & E_{1*} \\ E_{*1} & E_{**} \end{bmatrix} = -M_{lin}^{-1}C_{lin}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & F_{1*} \\ F_{*1} & F_{**} \end{bmatrix} = -M_{lin}^{-1}K_{lin}$$

$$\bar{B} = [b_1 \ B_*] = M_{lin}^{-1}L_{lin}$$

Ve [4] je formulován Teorém 1, dle kterého je cílený kmitavý mód dán výběrem z vlastních čísel matice:

$$\begin{bmatrix} O & I \\ \mathcal{F} & \mathcal{E} \end{bmatrix}$$

kde O a I jsou nulová a jednotková matice 2×2 a:

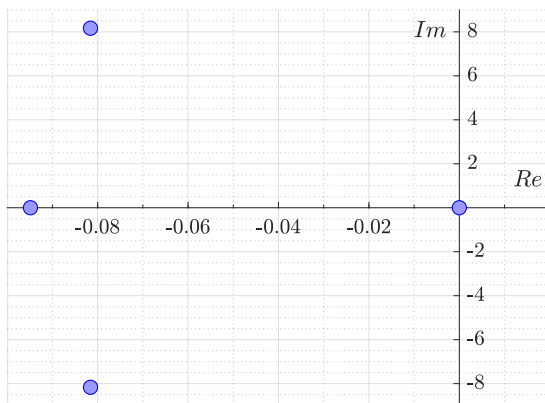
$$\mathcal{E} = E_{**} - \frac{1}{b_1} B_* E_{1*} \quad \mathcal{F} = F_{**} - \frac{1}{b_1} B_* F_{1*}$$

Po těchto výpočtech za pomoci Matlab skriptu jsou získána vlastní čísla:

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} 0.0000 + 0.0000j \\ -0.0816 + 8.1657j \\ -0.0816 - 8.1657j \\ -0.0949 + 0.0000j \end{bmatrix} \quad (27)$$

Izolovaný kmitavý mód kyvadla je charakterizován dvojicí pólů:

$$\bar{r} = -0.0816 \pm 8.1657j \quad (28)$$



Obr. 15. Vlastní čísla \bar{r} v komplexní rovině

Výpočet parametrů tvarovače na základě kmitavého módu je proveden obdobně jako u $D_e ZV$ tvarovače v odstavci 7.1.

Tabulka 3. Parametry inverzního tvarovače

\bar{T}	0.3849	s
$\bar{\tau}$	0.1911	s
\bar{A}	0.3964	

Výsledky (viz Tab. 3) jsou velmi podobné jako u $D_e ZV$ tvarovače (viz Tab. 2), neboť izolovaný kmitavý mód (28) je téměř shodný s (19).

Průběh úhlových výchylek při použití inverzního tvarovače je shodný jako při použití $D_e ZV$ tvarovače na Obr. 13, neboť zatím není do systému zanesena poruchová veličina.

8. Závěr

Pro laboratorní úlohu koptéry s jedním stupněm volnosti se zavěšeným závažím byl vytvořen matematický model v podobě soustavy nelineárních diferenciálních rovnic. Úpravou na model ve stavové formulaci a jeho linearizací v pracovním bodě byl získán lineární model, pomocí něhož byl navržen regulátor pro řízení úhlu náklonu ramene s motory. Poté byly implementovány tvarovače signálu (nejprve $D_e ZV$ a následně inverzní). Při použití obou byla filtrována řídicí veličina tak, aby závaží připevněné na závěsu nekmitalo. Rozdíly v aplikaci těchto tvarovačů se projeví při potlačování neměřitelných poruch působících v regulačním obvodu. To bude testováno během budoucí práce.

Poděkování

Děkuji tímto prof. Ing. Tomáši Vyhlídalovi, Ph.D. a Ing. Jaroslavu Buškovi za cenné konzultace a provedení při práci na projektu.

Vysvětlivky

V práci byla použita následující konvence:

A	matice	tučně, velké písmeno
x	vektor	tučně, malé písmeno

Literatura

- [1] Pavel ZÍTEK a Růžena PETROVÁ. *Matematické a simulační modely 2*. Vydavatelství ČVUT, 2012. ISBN: 80-01-02885-2.
- [2] Milan HOFREITER. *Základy automatického řízení*. České vysoké učení technické v Praze, 2012. ISBN: 978-80-01-05007-1.
- [3] Hromčík M. Vyhlídal T. Bušek J. Kuře M. “Control Design With Inverse Feedback Shaper for Quadcopter With Suspended Load”. In: (2018), s. 256 – 263. DOI: 10.1115/DSCC2018-9052.
- [4] M. Hromčík a T. Vyhlídal. “Inverse Feedback Shapers for Coupled Multibody Systems”. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 62 (2017), s. 4804–4810. DOI: 10.1109/TAC.2017.2688179.