

Objemové porovnávání metod pro identifikaci vírů v proudových polích

Václav Pokorný

Vedoucí práce: Ing. Jakub Šístek, Ph.D., Ing. Václav Kolář, CSc.

Abstrakt

Víry v proudových polích jsou identifikovány pomocí různých zavedených a stále vyvíjených metod, jejichž výsledky můžeme zobrazovat pomocí vizualizačních programů jako isoplochy. Například kvůli ověření vlastností nově zaváděných přístupů vzniká potřeba výsledky jednotlivých metod mezi sebou porovnávat. Jednoduchým řešením je užití metody nejlepšího překryvu, jejímž cílem je minimalizace poměru objemu, kde se isoplochy nepřekrývají, ku objemu, kde se překrývají. Snaha o objektivnější řešení nás vedla k zavedení tzv. objemového porovnávání metod, kde je objem uzavřený isoplochami různých metod shodný.

Klíčová slova

identifikace vírů, residuální vířivost, průměrná korotace, lambda-2 kritérium

1 Úvod

Každý den v našem životě se setkáváme s prouděním tekutin, ve kterých za určitých podmínek vznikají víry, jejichž identifikace může vést k zodpovězení různých otázek spojených s vírovým chováním tekutiny, například za zvolenými překážkami. Proudění je popsáno rovnicemi mechaniky tekutin, například Navierovými-Stokesovými rovnicemi, jejichž numerickým řešením nebo experimenty dostáváme tzv. proudové pole, které obsahuje vstupní hodnoty pro výpočty metod identifikujících víry. Tzv. lokální metody pro identifikaci vírů typicky vychází z tensoru gradientu rychlosti

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ je vektor rychlosti.

Zavedené metody [1] a stále vyvíjené metody, z nichž některé jsou detailněji popsány v [3], nám dávají různé výsledky, které interpretujeme formou isoploch, jejichž vykreslení závisí na tzv. hladině. Hodnoty hladin si pro jednotlivé metody nemusejí odpovídat, proto v případě vývoje nových přístupů je stěžejní porovnávání s již zavedenými a osvědčenými metodami, které nám ukáže, zda nová metoda dává na testovaných datech přijatelné a smysluplné výsledky.

Dvě identifikační metody můžeme porovnávat jednoduchou metodou nejlepšího překryvu, která je založena na minimalizaci hodnoty výrazu

$$\frac{V_N}{V_O}, \quad (2)$$

kde V_N je objem, kde se isoplochy nepřekrývají, a V_O je objem, kde se překrývají. Algoritmus porovnávání funguje tak, že zvolíme jednu identifikační metodu jako tzv. referenční se zvolenou hladinou a hladina druhé metody je určena minimalizací výrazu (2). Objemy uzavřené isoplochami si nemusejí odpovídat a navíc záměnou rolí identifikačních metod nedostaneme stejné výsledky, jak je ukázáno v [3]. Snaha porovnávat výsledky objektivněji nás vedla k vytvoření tzv. objemového porovnávání metod, kde je objem uzavřený výslednými isoplochami různých metod shodný. Objemové porovnávání jsme otestovali porovnáním veličin residuální vířivosti s průměrnou korotací a λ_2 na datech získaných z proudění okolo nakloněné desky pro Reynoldsovo číslo $Re = 300$.

Použité veličiny sloužící k identifikaci vírových struktur

Residuální vířivost [2] je odvozena z rozkladu $\nabla \mathbf{u}$ a zejména rozkladu jeho antisymetrické části (tensoru vířivosti), jehož cílem je eliminovat dopad zkreslující smykové složky proudění na průměrnou rychlost otáčení elementu tekutiny. K identifikaci vírů slouží velikost (Frobeniova norma) tensoru tzv. residuální vířivosti $\|\Omega_{RES}\|$.

Průměrná korotace [3] čarových segmentů je v okolí zkoumaného bodu úzce svázána s pojmem rovinné korotace (velikostně dané residuální vířivostí v rovině). Příslušnou identifikační veličinou je velikost vektoru průměrné korotace $|\omega_{RAVG}|$ získané jako průměr rovinné korotace přes „všechny roviny“ jdoucí zkoumaným bodem.

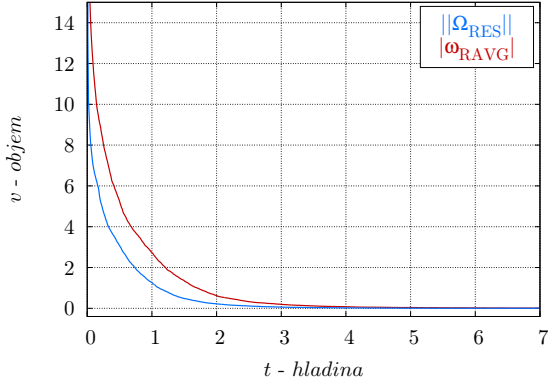
Veličina λ_2 [1] je identifikační charakteristika odvozená na základě redukované transportní rovnice pro symetrickou část $\nabla \mathbf{u}$, která umožňuje aproximativně popsat chování tlaku pomocí vlastních hodnot tensorové veličiny odvozené z $\nabla \mathbf{u}$. Fyzikální význam veličiny λ_2 je dán přímou souvislostí mezi její zápornou hodnotou a existencí tlakového minima v řezu napříč vírem.

2 Porovnávání metod na základě shodného objemu

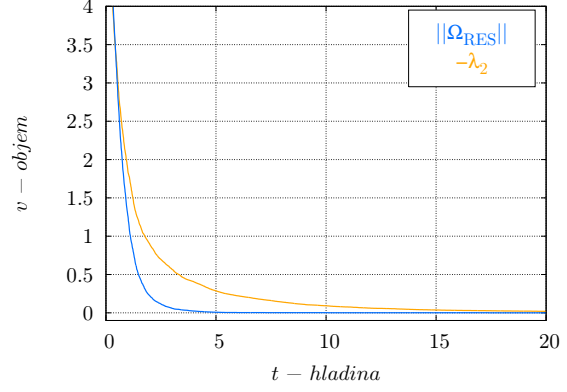
Předpokládáme, že objektivnější porovnávání metod je podmíněno shodným objemem, který je uzavřen isoplochami těchto metod. Zvolený objem v je závislý na hodnotě hladiny t diskrétní funkcí $v = f(t)$, která pro různé metody nemusí být shodná. Pro dohledávání odpovídajících si hladin používáme diskrétní inverzní funkci $t = f^{-1}(v)$, která je zprostředkována metodou půlení intervalů.

2.1 Závislost objemu na hodnotě hladiny $v = f(t)$

Diskrétní funkce $v = f(t)$ hladiny t je zobrazením ξ z množiny hladin T do množiny objemů V . Principem diskrétní funkce pro hladinu t^* a sít' konečných prvků je sečtení všech elementárních objemů, kde platí, že hodnota hladiny $t \geq t^*$, čímž dostáváme výslednou hodnotu objemu v^* . Pro maximální hodnotu hladiny v datech je objem isoplochy nulový, matematicky vyjádřeno $f(t_{max}) = 0$. Závislost $v = f(t)$ je znázorněna pro veličiny residuální vířivost, průměrnou korotací a λ_2 na obrázcích 1a a 1b. Schématické dohledání hodnot funkce $v = f(t)$ představuje obrázek 2a.



(a) $\|\Omega_{RES}\|$ a $|\omega_{RAVG}|$



(b) $\|\Omega_{RES}\|$ a $-\lambda_2$

Obr. 1: Závislost objemu na hladině, $v = f(t)$

2.2 Metoda půlení intervalů

Důležitou operací objemového porovnávání je nalezení hodnot inverzní funkce $t = f^{-1}(v)$, které získáváme metodou půlení intervalů.

Nejprve potřebujeme vstupní hodnoty, které budeme v algoritmu používat. Mějme tedy objem v^* , ke kterému hledáme hladinu t^* . Dále necht' $t_{max}^{(k)}$ a $t_{min}^{(k)}$, kde $t_{max}^{(k)} \neq t_{min}^{(k)}$, jsou minimální a maximální hodnoty hladin v T a k je index iterace. Nakonec nalezneme hodnotu hladiny t_p právě v polovině intervalu $I^{(k)} = \langle t_{min}^{(k)}; t_{max}^{(k)} \rangle$ podle vztahu

$$t_p = \frac{t_{max}^{(k)} + t_{min}^{(k)}}{2}. \quad (3)$$

Pro hodnoty $t_{max}^{(k)}$, $t_{min}^{(k)}$ a t_p zjistíme pomocí funkce $v = f(t)$ hodnoty objemů $v_{t_{min}^{(k)}}$, $v_{t_{max}^{(k)}}$ a v_{t_p} , pro které platí nerovnosti (viz obrázek 1)

$$v_{t_{max}^{(k)}} < v^* < v_{t_p} < v_{t_{min}^{(k)}}, \quad (4)$$

nebo

$$v_{t_{min}^{(k)}} < v_{t_p} < v^* < v_{t_{max}^{(k)}}. \quad (5)$$

Pokud platí nerovnost (4), pak se k hledané hodnotě t^* přiblížíme tak, že $t_{min}^{(k)}$ v dalším průchodu iteračním cyklem nahradíme t_p , tedy $t_{min}^{(k+1)} = t_p$. Pokud platí nerovnost (5), pak je postup obrácený, tedy $t_{max}^{(k+1)} = t_p$. Výše popsaná podmínka je vložena do iteračního cyklu a je zobrazena v algoritmu 1 na řádcích 5-9. Iterační cyklus probíhá, dokud není splněna ukončovací podmínka formulovaná nerovností

$$|t_{max}^{(k^*)} - t_{min}^{(k^*)}| < R, \quad (6)$$

kde R je předem zvolená konstanta ovlivňující přesnost výsledku a k^* je vyhovující počet iterací. Po skončení iteračního cyklu vypočítáme hledanou hladinu t^* jako střední hodnotu intervalu $I^{(k^*)} = \langle t_{min}^{(k^*)}; t_{max}^{(k^*)} \rangle$. Celá metoda je stručně popsána níže uvedeným algoritmem 1.

Algoritmus 1 Metoda půlení intervalů

```
1: načtení počátečních hodnot  $t_{max}^{(0)}, t_{min}^{(0)}$ 
2: while ( $|t_{max}^{(k)} - t_{min}^{(k)}| \geq R$ ) do
3:    $t_p \leftarrow \frac{t_{max}^{(k)} + t_{min}^{(k)}}{2}$ 
4:    $v_{t_{max}} \leftarrow f(t_{max}), v_{t_{min}} \leftarrow f(t_{min}), v_{t_p} \leftarrow f(t_p)$ 
5:   if  $v_{t_p} > v^*$  then
6:      $t_{min}^{(k+1)} \leftarrow t_p$ 
7:   else
8:      $t_{max}^{(k+1)} \leftarrow t_p$ 
9:   end if
10: end while
11:  $t^* \leftarrow \frac{t_{min}^{(k^*)} + t_{max}^{(k^*)}}{2}$ 
```

3 Výsledky

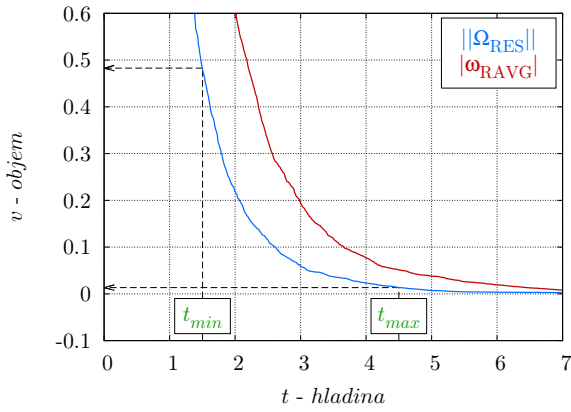
Objemové porovnávání jsme otestovali na datech proudění okolo nakloněné desky pod náběhovým úhlem 30° pro Reynoldsovo číslo $Re = 300$. Nejprve jsme pro různé hodnoty hladin prozkoumali vykreslované isoplochy residuální vířivosti a stanovili hraniční hladiny $t_{max} = 4.5$ a $t_{min} = 1.5$, ke kterým jsme z funkce $v = f(t)$ určili hraniční objemy $v_{t_{max}}$ a $v_{t_{min}}$. Tento krok je znázorněn na obrázku 2a. Následně jsme rozdíl hraničních objemů rozdělili na pět shodných částí a ke všem objemům jsme z funkce $t = f^{-1}(v)$ stanovili hladiny (viz obrázek 2b). Pro hodnoty hladin jsme vizualizačním programem ParaView vykreslili isoplochy (obrázky 3 - 14). Kritérium, které určuje míru neshody isoploch, je hodnota poměru V_N/V_O dle (2). Tímto způsobem jsme porovnávali veličiny residuální vířivosti s průměrnou korotací a s λ_2 . Získané hodnoty poměru V_N/V_O jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Objemové porovnání a hladiny veličin $\|\Omega_{RES}\|$, $|\omega_{RAVG}|$ a λ_2

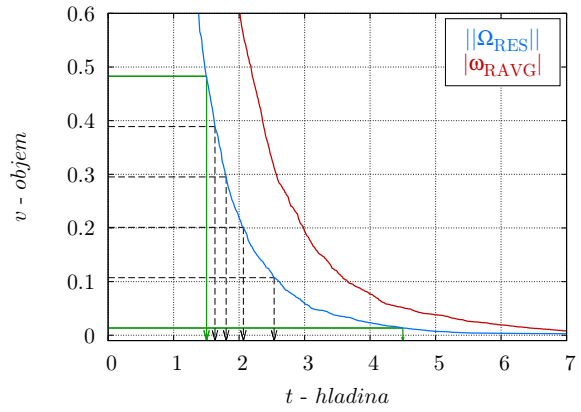
Objem (V_i)	$\ \Omega_{RES}\ $	$ \omega_{RAVG} $	Neshoda isoploch $\frac{V_N}{V_O}$	λ_2	Neshoda isoploch $\frac{V_N}{V_O}$
0.48	1.5	2.2	0.16	-3.4	1.03
0.39	1.6	2.4	0.20	-4.1	1.03
0.30	1.8	2.6	0.21	-4.9	0.95
0.20	2.1	3.0	0.16	-6.5	0.68
0.11	2.5	3.6	0.22	-9.1	0.72
$1.34 \cdot 10^{-2}$	4.5	6.4	0.24	-23.9	2.12

V předchozím porovnávání těchto metod v [4] vychází isoplochy residuální vířivosti a průměrné korotace velmi podobné avšak isoplochy λ_2 se liší především v oblastech výrazného smyku u hran desky.

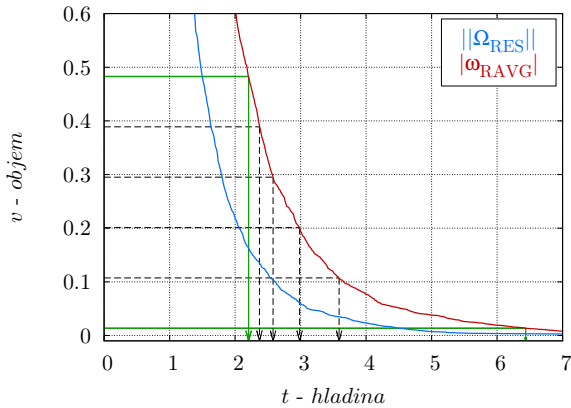
Výsledkem objemového porovnávání residuální vířivosti s průměrnou korotací je sada obrázků 3 - 8, ze kterých je patrné, že výsledné isoplochy jsou si velmi podobné, což také ukazují hodnoty neshody isoploch v tabulce 1. Nový způsob porovnání potvrdil, že isoplochy residuální vířivosti a průměrné korotace vychází velmi podobně.



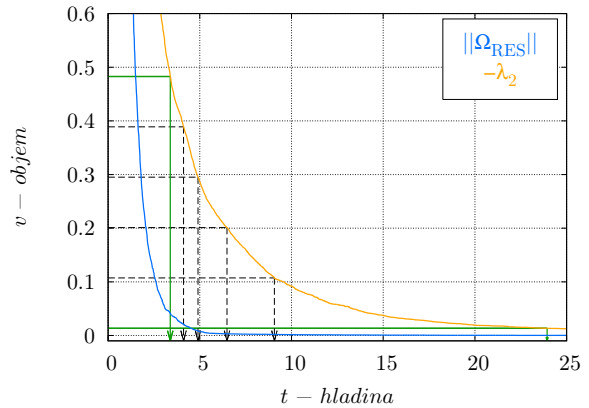
(a) Stanovení hraničních objemů z funkce $v = f(t)$



(b) Stanovení hodnot hladin pro $\|\Omega_{RES}\|$



(c) Stanovení hodnot hladin pro $|\omega_{RAVG}|$



(d) Stanovení hodnot hladin pro λ_2

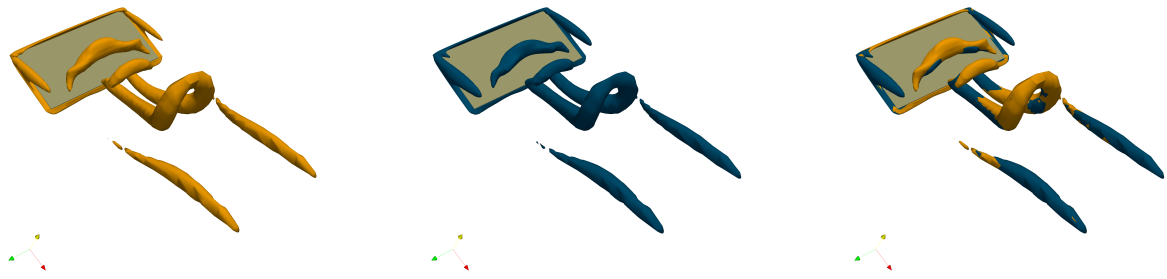
Obr. 2: Ilustrace k algoritmu objemového porovnávání

Výsledkem objemového porovnávání residuální vířivosti s λ_2 je podobná sada obrázků 9 - 14, ze které vidíme, že isoplochy veličiny λ_2 potlačují tzv. koncové víry a že v zónách výrazného smyku okolo hran desky jsou objemnější než isoplochy residuální vířivosti, které koncentrují svůj objem v oblasti omega víru, jak je patrné především z obrázku 9. Rozdílnost výsledných isoploch je taktéž patrná z hodnot překryvu uvedených v tabulce 1, které jsou přibližně o řád vyšší než u porovnávání s průměrnou korotací. Isoplochy veličin residuální vířivosti a λ_2 se od sebe liší více a to především v oblastech výrazného smyku. Objemové porovnávání nám tedy dalo smysluplné a použitelné výsledky.

4 Závěr

Prezentovali jsme nový způsob porovnávání metod pro identifikaci vírů. Přístup je založen na rovnoměrném rozdělení zvolené části objemu uzavřené isoplochami. Pro jednotlivé části objemu jsou metodou půlení intervalů dohledány hodnoty hladin. Kritériem ukazujícím míru neshody vykreslovaných isoploch je hodnota poměru V_N/V_O dle 2. Výsledky jsou prezentovány formou obrázků isoploch vytvořených ve vizualizačním programu ParaView.

Objemovým porovnáváním veličin residuální vířivosti s průměrnou korotací a s λ_2 na datech proudění okolo nakloněné desky jsme ověřili, že isoplochy residuální vířivosti a průměrné korotace jsou velmi podobné a že isoplochy residuální vířivosti a λ_2 se od sebe liší více a to především v oblastech výrazného smyku u hran desky, jak je již zmíněno v [4]. Výsledky získané na těchto datech nám ukazují, že nový způsob porovnávání dává dobré podklady pro hodnocení podobnosti metod pro identifikaci vírů. Hlavní výhodou tohoto přístupu je lepší objektivnost porovnávání. Práce se omezuje na objemové porovnání, a tudíž nepostihuje tvarové srovnání výsledků identifikačních metod, což by činilo srovnávací problém mnohem náročnější.

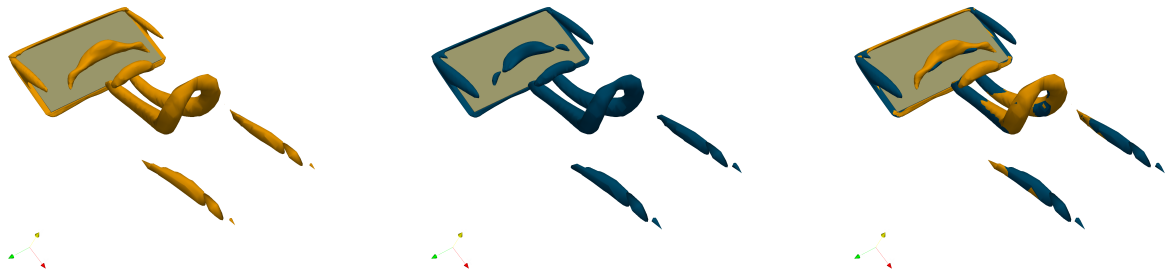


(a) $\| \Omega_{RES} \|$

(b) $| \omega_{RAVG} |$

(c) Porovnání isoploch

Obr. 3: Porovnání pro $V_1 = 0.48$, $\| \Omega_{RES} \| = 1.5$ a $| \omega_{RAVG} | = 2.2$



(a) $\| \Omega_{RES} \|$

(b) $| \omega_{RAVG} |$

(c) Porovnání isoploch

Obr. 4: Porovnání pro $V_2 = 0.39$, $\| \Omega_{RES} \| = 1.6$ a $| \omega_{RAVG} | = 2.4$

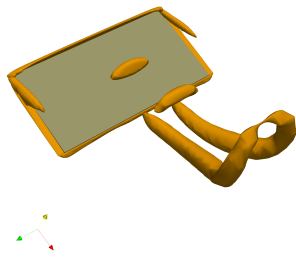


(a) $\| \Omega_{RES} \|$

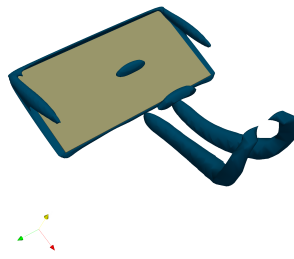
(b) $| \omega_{RAVG} |$

(c) Porovnání isoploch

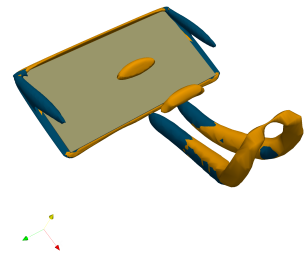
Obr. 5: Porovnání pro $V_3 = 0.30$, $\| \Omega_{RES} \| = 1.8$ a $| \omega_{RAVG} | = 2.6$



(a) $\|\Omega_{RES}\|$

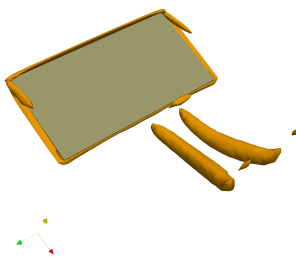


(b) $|\omega_{RAVG}|$

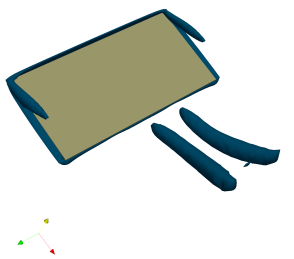


(c) Porovnání isoploch

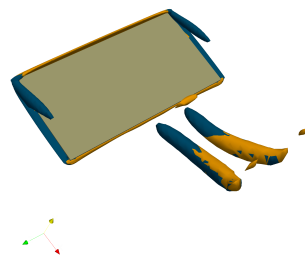
Obr. 6: Porovnání pro $V_4 = 0.20$, $\|\Omega_{RES}\| = 2.1$ a $|\omega_{RAVG}| = 3.0$



(a) $\|\Omega_{RES}\|$

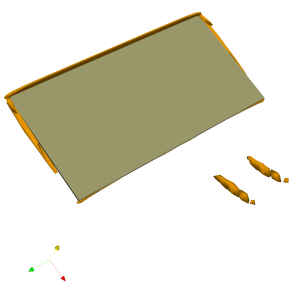


(b) $|\omega_{RAVG}|$

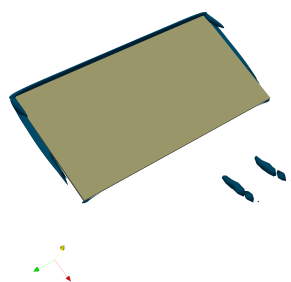


(c) Porovnání isoploch

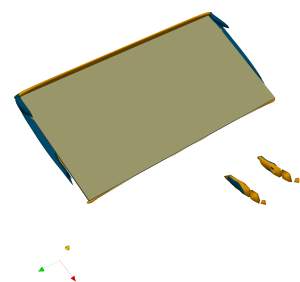
Obr. 7: Porovnání pro $V_5 = 0.11$, $\|\Omega_{RES}\| = 2.5$ a $|\omega_{RAVG}| = 3.6$



(a) $\|\Omega_{RES}\|$

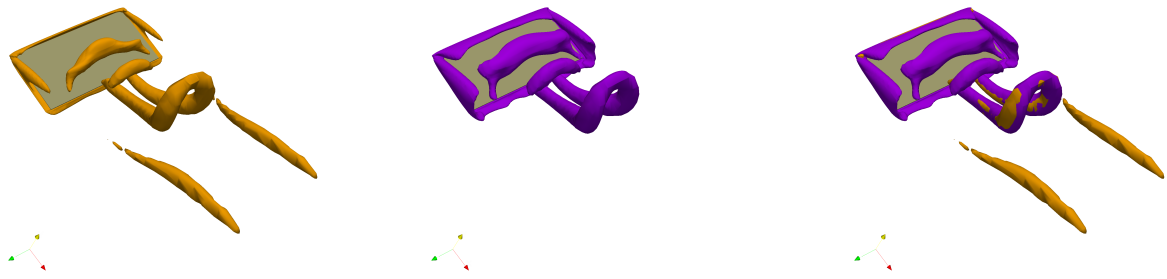


(b) $|\omega_{RAVG}|$



(c) Porovnání isoploch

Obr. 8: Porovnání pro $V_6 = 1.34 \cdot 10^{-2}$, $\|\Omega_{RES}\| = 4.5$ a $|\omega_{RAVG}| = 6.4$

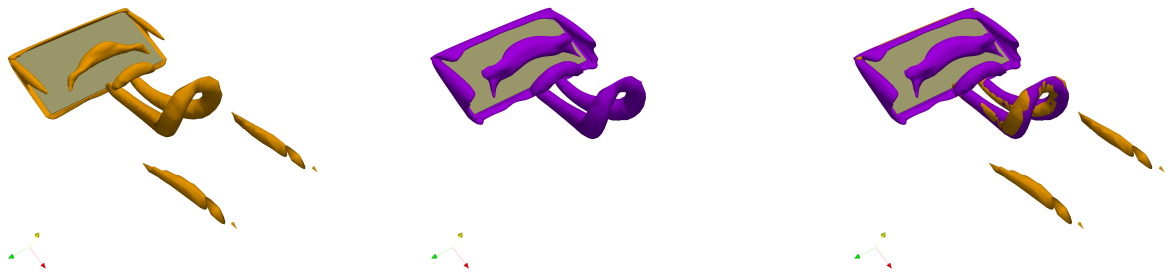


(a) $\|\Omega_{RES}\|$

(b) λ_2

(c) Porovnání isoploch

Obr. 9: Porovnání pro $V_1 = 0.48$, $\|\Omega_{RES}\| = 1.5$ a $\lambda_2 = -3.4$



(a) $\|\Omega_{RES}\|$

(b) λ_2

(c) Porovnání isoploch

Obr. 10: Porovnání pro $V_2 = 0.39$, $\|\Omega_{RES}\| = 1.6$ a $\lambda_2 = -4.1$

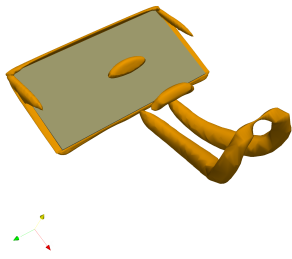


(a) $\|\Omega_{RES}\|$

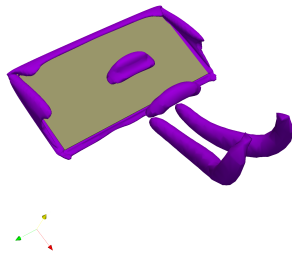
(b) λ_2

(c) Porovnání isoploch

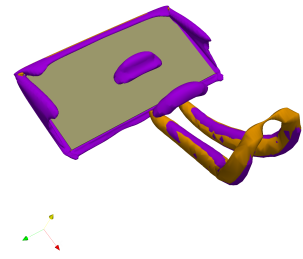
Obr. 11: Porovnání pro $V_3 = 0.30$, $\|\Omega_{RES}\| = 1.8$ a $\lambda_2 = -4.9$



(a) $\| \Omega_{RES} \|$

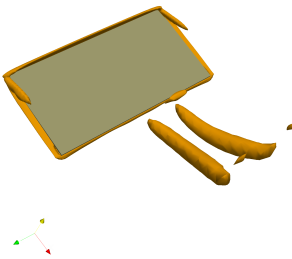


(b) λ_2

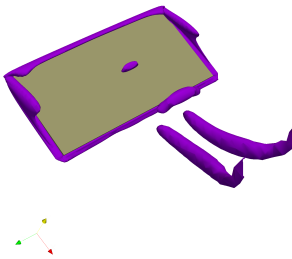


(c) Porovnání isoploch

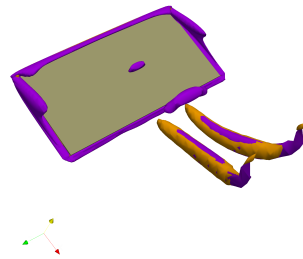
Obr. 12: Porovnání pro $V_4 = 0.20$, $\| \Omega_{RES} \| = 2.1$ a $\lambda_2 = -6.5$



(a) $\| \Omega_{RES} \|$

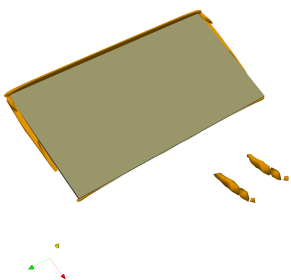


(b) λ_2

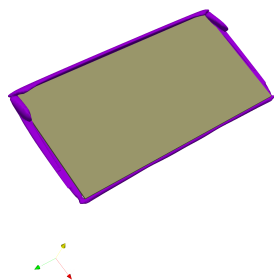


(c) Porovnání isoploch

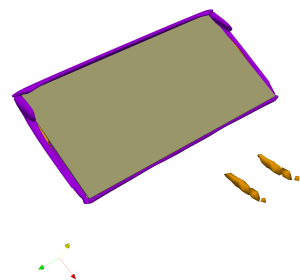
Obr. 13: Porovnání pro $V_5 = 0.11$, $\| \Omega_{RES} \| = 2.5$ a $\lambda_2 = -9.1$



(a) $\| \Omega_{RES} \|$



(b) λ_2



(c) Porovnání isoploch

Obr. 14: Porovnání pro $V_6 = 1.34 \cdot 10^{-2}$, $\| \Omega_{RES} \| = 4.5$ a $\lambda_2 = -23.9$

Seznam symbolů

$\nabla \mathbf{u}$	tensor gradientu rychlosti
V_i	objem uzavřený isoplochami
V_N	objem, kde se isoplochy nepřekrývají
V_O	objem, kde se isoplochy překrývají
λ_2	veličina pro identifikaci vírů zavedená v [1]
$\ \boldsymbol{\Omega}_{RES}\ $	velikost tensoru residuální vířivosti zavedené v [2]
$ \boldsymbol{\omega}_{RAVG} $	velikost vektoru průměrné korotace zavedené v [3]

Seznam použité literatury

- [1] Jeong, J. & Hussain, F., On the Identification of a Vortex, *Journal of Fluid Mechanics*, 285 (1995), 69-94.
- [2] Kolář, V., Vortex Identification: New Requirements and Limitations, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28 (2007), 638-652.
- [3] Kolář, V., Šístek, J., Cirak, F. & Moses, P., Average Corotation of Line Segments Near a Point and Vortex Identification, *AIAA Journal*, 51 (2013), 2678-2694.
- [4] Kolář, V. & Šístek, J., *Recent Progress in Explicit Shear-Eliminating Vortex Identification*, 19th Australasian Fluid Mechanics Conference, Melbourne, Australia, 8-11 December 2014.