

Optimalizace vláknového kompozitu

Bc. Jan Toman

Vedoucí práce: doc. Ing. Tomáš Mareš, Ph.D.

Abstrakt

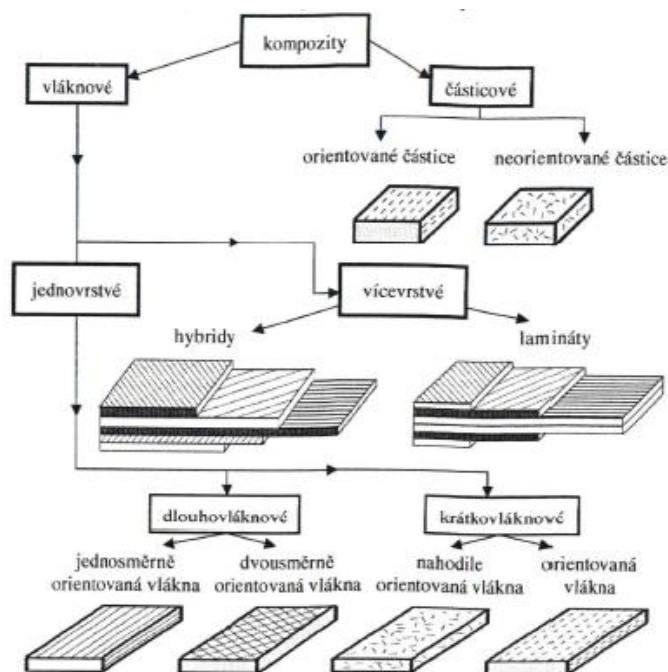
Optimalizace trubkového profilu z vláknového kompozitu při využití Timošenkovy hypotézy. Hledání optimálního úhlu vinutí vlákna pro kritérium maximální tuhosti profilu. Vyšetřování vlivu jednotlivých optimalizačních parametrů - geometrie profilu, skladby kompozitu a jeho materiálových vlastností.

Klíčová slova

Vláknový kompozit, laminát, Timošenkova hypotéza, Lamého rovnice, laminační teorie, optimální úhel vinutí vlákna

1. Úvod – vláknové kompozity

Z kompozitních materiálů, které obecně vznikají skladbou složek z různých materiálů, jsou v technické praxi jedněmi z nejpoužívanějších právě vláknové kompozity. Pro představu je na obr. 1 zobrazeno základní rozdělení kompozitů, které bylo převzato z publikace prof. Laše [1].



Obr. 1. Základní rozdělení kompozitů – převzato z [1]

Vláknové kompozity jsou složeny z dlouhých vláken vysoké pevnosti (nejčastěji uhlíkových), které jsou uloženy zpravidla v epoxidové matici. V rámci diplomové práce jsme se zabývali optimalizací vláknového kompozitu v podobě laminátu složeného z k-vrstev.

2. Optimalizace trubkového profilu

Abychom se mohli zabývat optimalizací, musíme nejprve odvodit kritériální funkci s příslušnými návrhovými parametry pro danou optimalizační úlohu. V našem případě bude optimalizačním kritériem maximální tuhost nosníku a hlavním návrhovým parametrem potom úhel vinutí vlákna, který ovšem bude záviset na dalších parametrech.

2.1 Kritériální funkce

Uvažujeme nosník dle obr. 2. Budeme předpokládat rovinnou úlohu, pro kterou platí rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial M_2}{\partial x} = Q_3 \quad (1)$$

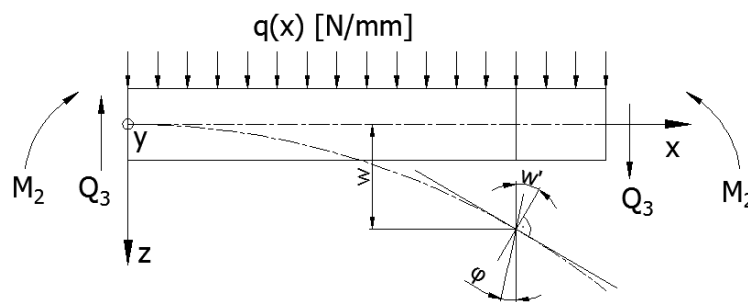
$$\frac{\partial Q_3}{\partial x} = -q(x) \quad (2)$$

$$M_1 = 0 \quad (3)$$

$$M_3 = 0 \quad (4)$$

$$Q_2 = 0 \quad (5)$$

$$N_1 = 0 \quad (6)$$



Obr. 2. Zatížení a deformace nosníku

Dále budeme předpokládat platnost Timošenkovy hypotézy, pro kterou platí

- nosník se deformuje pouze vertikálně (v ose z)
- rovinné plochy kolmé ke střednici zůstávají rovinnými i po deformaci, ale už nejsou kolmé ke střednici (jak předpokládá Bernoulliova hypotéza)
- tloušťka nosníku resp. jeho jednotlivých vrstev se při deformaci nemění

Pole posunutí nosníku potom bude

$$u_1(x) = -z\phi(x) \quad (7)$$

$$u_2(x) = 0 \quad (8)$$

$$u_3(x) = w(x) \quad (9)$$

Použijeme-li zobecněný Hookeův zákon, dostaneme po následném odvození Lamého rovnice ve tvaru

$$\varphi_{,111} = \frac{q}{D} \quad (10)$$

$$w_{,1} = \varphi - \frac{D}{A} \varphi_{,11} \quad (11)$$

kde A, D jsou matice tahové resp. ohybové tuhosti, které mají dle laminační teorie tvar

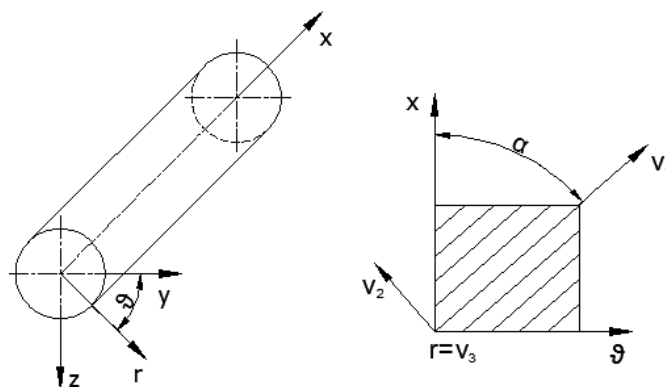
$$A = \sum_k \frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \pi (E_{2121}^g + E_{3131}^g) \quad (12)$$

$$D = \sum_k \frac{r_e^4 - r_i^4}{4} \pi E_{1111}^g \quad (13)$$

Nosník je složen z k-vrstev, kde jednotlivé vrstvy lamin mají vlákna vinuty pod úhlem α , přičemž skladba laminátu je symetrická, a proto je matice vazební tuhosti $B=0$. Indexy \mathcal{G} se vztahují k souřadnému systému tečna-normála dle obr. 3, přičemž materiálové vlastnosti se transformují z hlavních os anizotropie dle vztahů

$$T_1 = \cos(\mathcal{G}, \nu) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$E^g = (T_1 \otimes T_1) E^\nu (T_1^T \otimes T_1^T) \quad (15)$$



Obr. 3. Pootočení souřadných systémů ν a \mathcal{G} o úhel α

Budeme-li uvažovat okrajové podmínky pro vetknutý nosník s volným koncem zatíženým osamělou silou, dostaneme po integraci rovnice 10 a 11 konečně

$$\varphi(x) = \frac{F}{D} \left(lx - \frac{1}{2} x^2 \right) \quad (16)$$

$$w(x) = F \left(\frac{1}{A} x + \frac{l}{2D} x^2 - \frac{1}{6D} x^3 \right) \quad (17)$$

Jak již bylo řečeno, optimalizačním kritériem pro nás bude maximalizace tuhosti profilu, přičemž z rovnice 17 vyplývá, že největší průhyb nosníku bude na jeho volném konci, tedy

$$w(l) = F \left(\frac{l}{A} + \frac{l^3}{3D} \right) \quad (18)$$

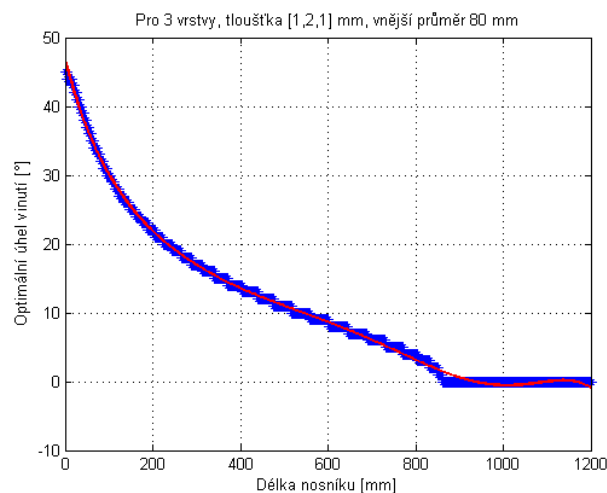
Minimalizací vztahu 18 tedy dostáváme maximální tuhost profilu. Budeme-li předpokládat symetrickou skladbu laminátu, stejný materiál všech lamin a stejnou tloušťku všech lamin, dostaneme kritériální funkci ve tvaru

$$w = w(\alpha(l, d, t, n, E_L, E_T)) \rightarrow \min. \quad (19)$$

kde hlavním návrhovým parametrem pro nás bude úhel vinutí vlákna α a ostatní parametry budeme vztahovat právě k němu. Budeme tedy hledat optimální úhel vinutí, tj. takový úhel vinutí, pro který je splněna rovnice 19.

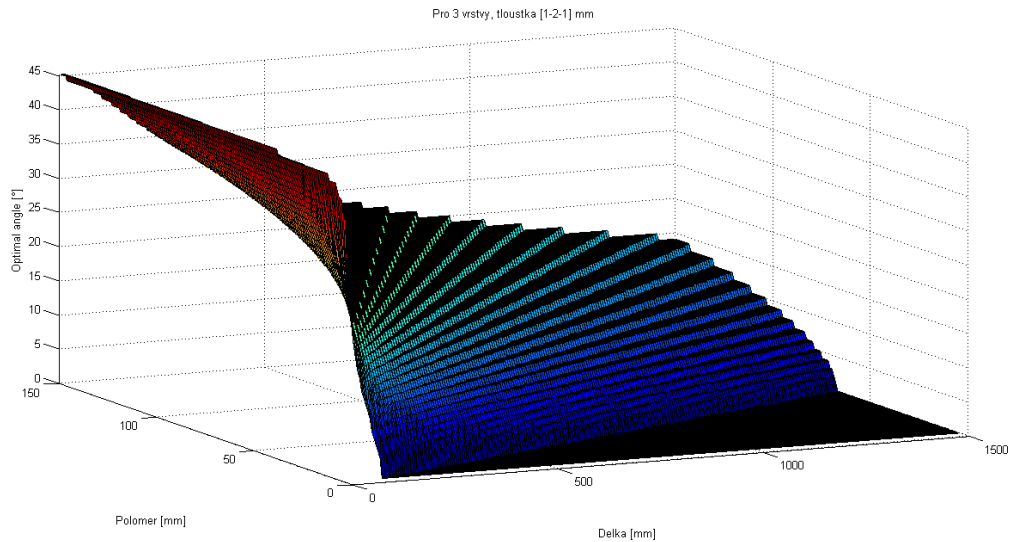
2.2 Vliv délky a vnějšího průměru laminátu

Budeme-li zkoumat závislost optimálního úhlu vinutí na délce, přičemž ostatní parametry jsou fixovány na zvolených hodnotách, dostaneme závislost na obr. 4. Z něj je patrné, že s rostoucí délkou a tedy i štíhlostí nosníku se optimální úhel vinutí blíží k hodnotě 0° , a naopak nosníky s malou štíhlostí k hodnotě 45° . To odpovídá i teoretickým předpokladům, neboť s rostoucí délkou nosníku klesá vliv smykových napětí a uplatňuje se převážně ohybové napětí.



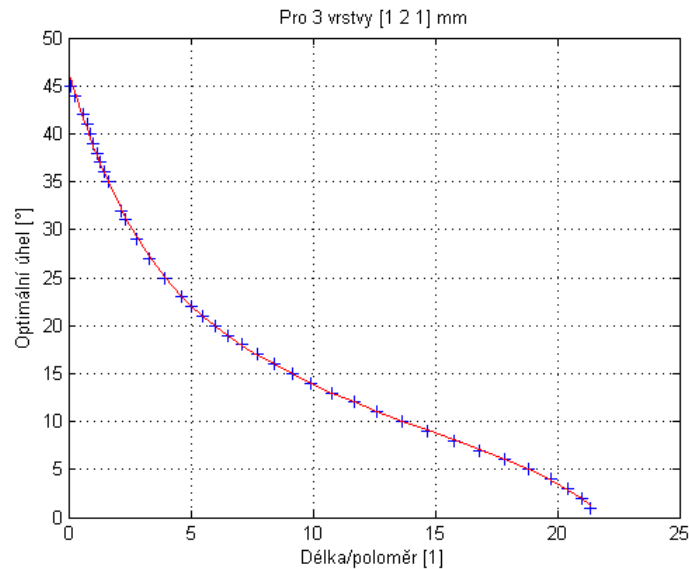
Obr. 4. Optimální úhel vinutí vlákna pro různé délky nosníku

Pokud rozšíříme závislost optimálního úhlu vinutí o další proměnnou, kterou bude vnější průměr laminátu, dostaneme závislost na obr. 5. Funkce není hladká, což je způsobeno diskretizací oboru hodnot úhlu vinutí po 1° , přičemž při zmenšování diskretizačního kroku se bude funkce postupně vyhlazovat.



Obr. 5. Optimální úhel vinutí vlákna pro různé délky a vnější průměry nosníku

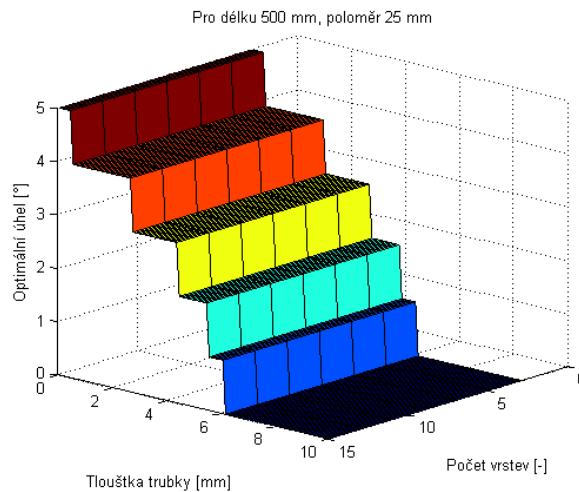
Zavedeme-li novou proměnnou jako poměr délky ku průměru nosníku, dostaneme konečně závislost na obr. 6, kterou můžeme ve smyslu metody nejmenších čtverců nahradit lineární regresí např. s využitím Legendreových polynomů.



Obr. 6. Optimální úhel vinutí vlákna pro různé poměry délky ku vnějšímu průměru nosníku

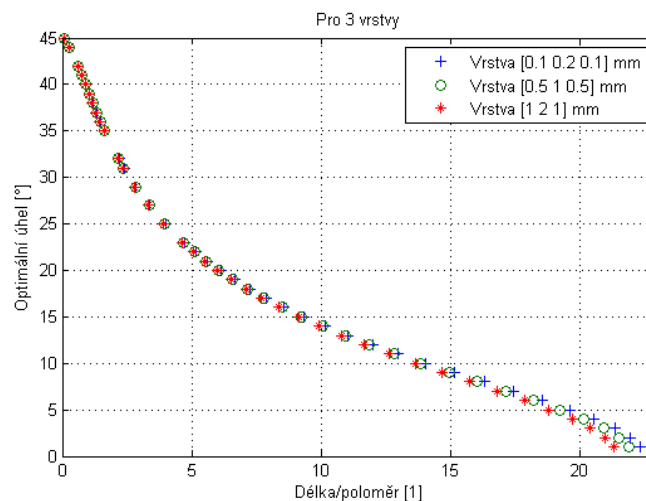
2.3 Vliv tloušťky a počtu vrstev laminátu

Dále budeme zkoumat, jak se bude optimální úhel vinutí měnit s tloušťkou stěny laminátu a s počtem vrstev. Pro danou délku a průměr nosníku dostáváme závislost na obr. 7, ze kterého je patrné, že na počtu vrstev je pro danou tloušťku optimální úhel vinutí nezávislý.



Obr. 7. Optimální úhel vinutí vlákna v závislosti na počtu vrstev a tloušťce stěny

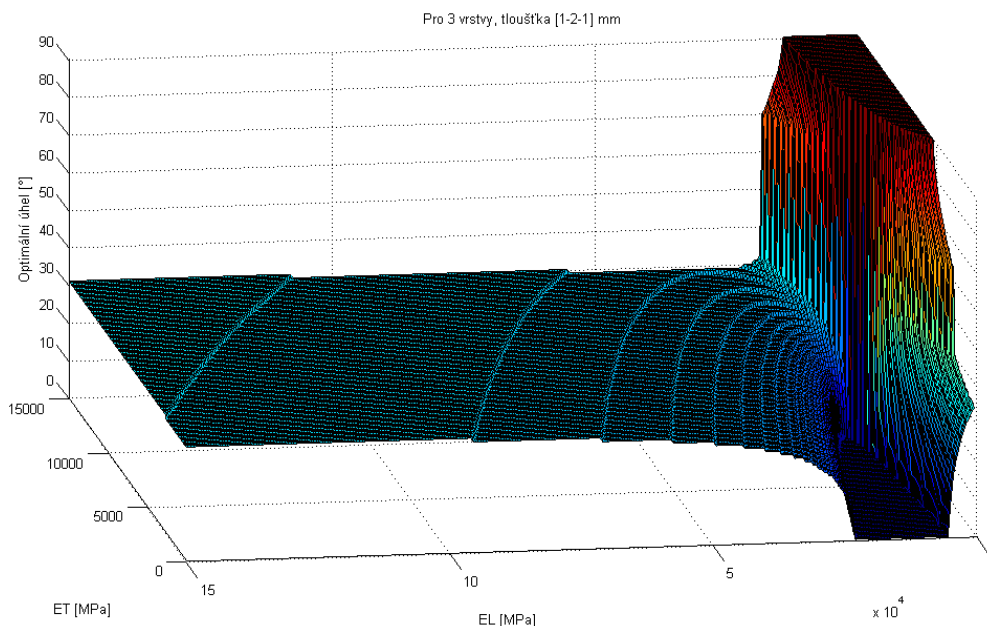
Pokud budeme dále uvažovat pouze vliv tloušťky, dostaneme křivky dle obr. 8. S rostoucí tloušťkou se křivky postupně „napřimují“, ale pro zúžený obor hodnot (ať už tenkostěnných či tlustostěnných profilů) můžeme i vliv tloušťky zanedbat.



Obr. 8. Optimální úhel vinutí vlákna pro různé tloušťky vrstev

2.4 Vliv materiálu laminátu

Konečně se budeme zabývat vlivem materiálu laminátu. Pro fixovanou geometrii nosníku dostáváme pro optimální úhel vinutí závislost z obr. 9. Oblast růstu resp. propadu, způsobená poklesem hodnot modulu pružnosti v podélném resp. příčném směru můžeme zanedbat, neboť pro lamináty z uhlíkových vláken v epoxidové matici pracujeme běžně s moduly pružnosti v podélném směru v řádech stovek MPa. Tedy i zde můžeme pro zúžený obor hodnot modulů pružnosti vliv materiálu na optimální úhel vinutí vlákna zanedbat.



Obr. 9. Optimální úhel vinutí vlákna pro různé moduly pružnosti v podélném a příčném směru

3. Závěr

Provedli jsme, při výše uvedených předpokladech, optimalizaci laminátu trubkového profilu, přičemž optimalizačním kritériem byla maximální tuhost a návrhovým parametrem úhel vinutí vlákna, který dále závisel na dalších parametrech.

Zjistili jsme, že pro zúžené obory hodnot materiálových vlastností a tloušťky profilu závisí optimální úhel vinutí jen na délce a vnějším průměru laminátu dle obr. 6. Můžeme tedy pro danou skladbu laminátu na základě jeho geometrie určit optimální úhel vinutí, pro který bude nosník nejtužší.

Uvedené poznatky v rámci diplomové práce dále využíváme při optimalizaci smykadla obráběcího stroje, u něž řešíme vícekritériální optimalizaci – minimalizaci hmotnosti při maximalizaci tuhosti.

Seznam symbolů

| | | |
|-----------|-------------------------------------|-----------------------|
| A | matice tahové tuhosti | (N) |
| D | matice ohybové tuhosti | (N.mm ²) |
| E | modul pružnosti v tahu | (N.mm ⁻²) |
| F | zatěžující osamělá síla | (N) |
| M_i | moment kolem i -té osy | (N.mm) |
| Q_i | posouvající síla v i -té ose | (N) |
| φ | úhel natočení nosníku kolem osy y | (rad) |
| w | posunutí nosníku v ose z | (mm) |
| u_i | pole posunutí nosníku | (mm) |
| T | matice směrových kosinů | (-) |

Seznam použité literatury

[1] Laš, Vladislav. Mechanika kompozitních materiálů. 1. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004. 156 stran. ISBN 80-7043-273-X

[2] Ehrenstein, Gotfried W. Polymerní kompozitní materiály. 1. vydání. Praha: Scientia, 2009. 351 stran. ISBN 978-80-86960-29-6.

[3] Gurdal, Zafer. Haftka, Raphael T. Hajela, Prabhat. Design and optimization of laminated composite materials. Toronto: John Wiley & Sons, inc., 1999. ISBN 0-471-25276-X

[4] Mareš, Tomáš. Základy konstrukční optimalizace. Praha: ČVUT v Praze, 2006. 307 stran. ISBN 80-239-6508-5

[5] Brdička, Miroslav. Samek, Ladislav. Sopko, Bruno. Mechanika Kontinua. 3. Vydání. Praha: Academia, 2005. 799 stran. ISBN 80-200-1344-X

Poděkování

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže SGS15/188/OHK2/3T/12.