

Pokročilá modální analýza

Bc. Petr Sobotka

Vedoucí práce: Ing. Pavel Steinbauer, Ph.D.

Abstrakt

Článek se věnuje pokročilé identifikaci modálních parametrů z naměřených dat při experimentální modální analýze. S výhodou byla použita naměřená data z vibrometru PSV-400, který v sobě zahrnuje pouze základní algoritmus na identifikaci modálních parametrů a není v mnoha případech dostačující. V textu je představen návrh a realizace nahrazení této identifikace, konkrétně algoritmem optimalizované lineární metody nejmenších čtverců s následnou konstrukcí stabilizačního diagramu. Výsledky navrženého postupu byly porovnány s hodnotami vibrometru PSV-400.

Klíčová slova

Modální analýza, identifikace modálních parametrů, lineární metoda nejmenších čtverců, stabilizační diagram, vibrometr PSV-400

1. Úvod

Modální analýza je oblastí dynamiky, která má velký význam v technické diagnostice. Díky této metodě lze získat úplný dynamický popis mechanické soustavy. Cílem modální analýzy je určení vlastních frekvencí, poměrných tlumení, popř. určení vlastních tvarů vyšetřované soustavy (souhrnně modální parametry soustavy). Ty je možno získat dvěma základními postupy. Buď teoretickým přístupem, kdy je znám přímo matematický model soustavy a modální parametry se dají jednoduše dopočítat, anebo v našem případě experimentálním přístupem, kdy se modální parametry získávají měřením.

Co se týče experimentálního přístupu, označuje se celý proces, tj. příprava experimentu, odměření přenosových funkcí, zpracování naměřených dat a určení modálních parametrů, pojmem modální zkouška. Tu je možno realizovat v laboratořích ústavu mechaniky za pomoci velmi kvalitního měřicího zařízení – laserového skenovacího vibrometru PSV-400 od firmy Polytec. Měření probíhá na dopplerovském principu, kdy je měřena rychlost pohybu vybraného rastru bodů na kmitajících objektech. Díky tomu, že se k měření používá laserový paprsek, je měření bezdotykové a snímací aparatura nijak neovlivňuje vlastnosti měřené soustavy (na rozdíl např. od akcelerometrů). Zařízení PSV-400 se skládá z částí: vyhodnocovací hlava – obsahuje jak laserovou skenovací jednotku, tak i videokameru pro nastavení snímaných bodů; centrální jednotky – řídí měřicí hlavu a zpracovávají signály z měřicí hlavy; PC a software – provádí řízení měření a zpracování naměřených dat včetně jejich vizualizace.



Obr. 1 – Měřicí aparatura PSV-400 pro modální zkoušku

Právě software je však zdrojem řady problémů. Jde především o jeho způsob identifikace modálních parametrů. Ty se určují na základě jednoho z nejjednodušších postupů experimentální modální analýzy (dále jen EMA). Tento postup předpokládá řadu zjednodušujících úvah, a tak jsou data získaná kvalitní měřicí aparaturou jistou měrou v mnoha případech znehodnocena¹. Navíc ani zpracování výsledků softwarem neposkytuje veškeré potřebné údaje, jako jsou výsledné modální parametry ve tvaru charakteristickém pro modální analýzu.

Obecně je většina zjednodušených postupů EMA založena na matematických modelech s jedním stupněm volnosti, kdy se vyšetřují data po částech. Hlavním předpokladem takových postupů jsou dostatečně oddělené vlastní frekvence, což pro moderní součásti (kompozity apod. s blízkými módy) není možné. V těchto případech vlastní identifikace modálních parametrů spíše znehodnotí veškerý dosavadní postup získávání výsledných parametrů².

Z uvedených důvodů byla snaha nahradit tuto část modální zkoušky jinými postupy, které by lépe identifikovaly modální parametry z naměřených dat a poskytly výsledky ve standardních tvarech. Tyto požadavky lze shrnout následujícím způsobem.

2. Koncept práce

Cílem práce je tedy nahrazení části modální zkoušky prováděné vibrometrem PSV-400 za účelem získání věrohodnějších modálních parametrů ve standardním tvaru při použití pokročilých metod modální analýzy. Celý koncept práce je rozdělen na několik kroků:

- *export naměřených dat z vibrometru PSV-400 do prostředí Matlab*
- *aplikace algoritmu experimentální modální analýzy na naměřená data – konkrétně optimalizovaná lineární metoda nejmenších čtverců s použitím stabilizačního diagramu*
- *zpracování výsledků ve tvarech charakteristických pro modální analýzu (vlastní frekvence, poměrná tlumení, vlastní vektory a následná animace vlastních tvarů)*
- *porovnání dosažených výsledků s PSV-400*

Jelikož se jedná o práci s daty ve formě poměrně velkých matic, je výhodné využít prostředí Matlab, které je na práci s maticemi dobře optimalizované. Pro kompletní zpracování dat a interpretaci výsledků budou algoritmy implementovány do aplikace, která bude zahrnovat všechny kroky od načtení souboru s naměřenými daty, přes identifikaci modálních parametrů, až po interpretaci výsledků.

V následujících kapitolách bude představen celý postup řešení úlohy. Jelikož má práce poměrně rozsáhlý charakter, a to zejména z hlediska matematického aparátu, budou uvedeny pouze nejvýznamnější poznatky a některé další alespoň komentovány.

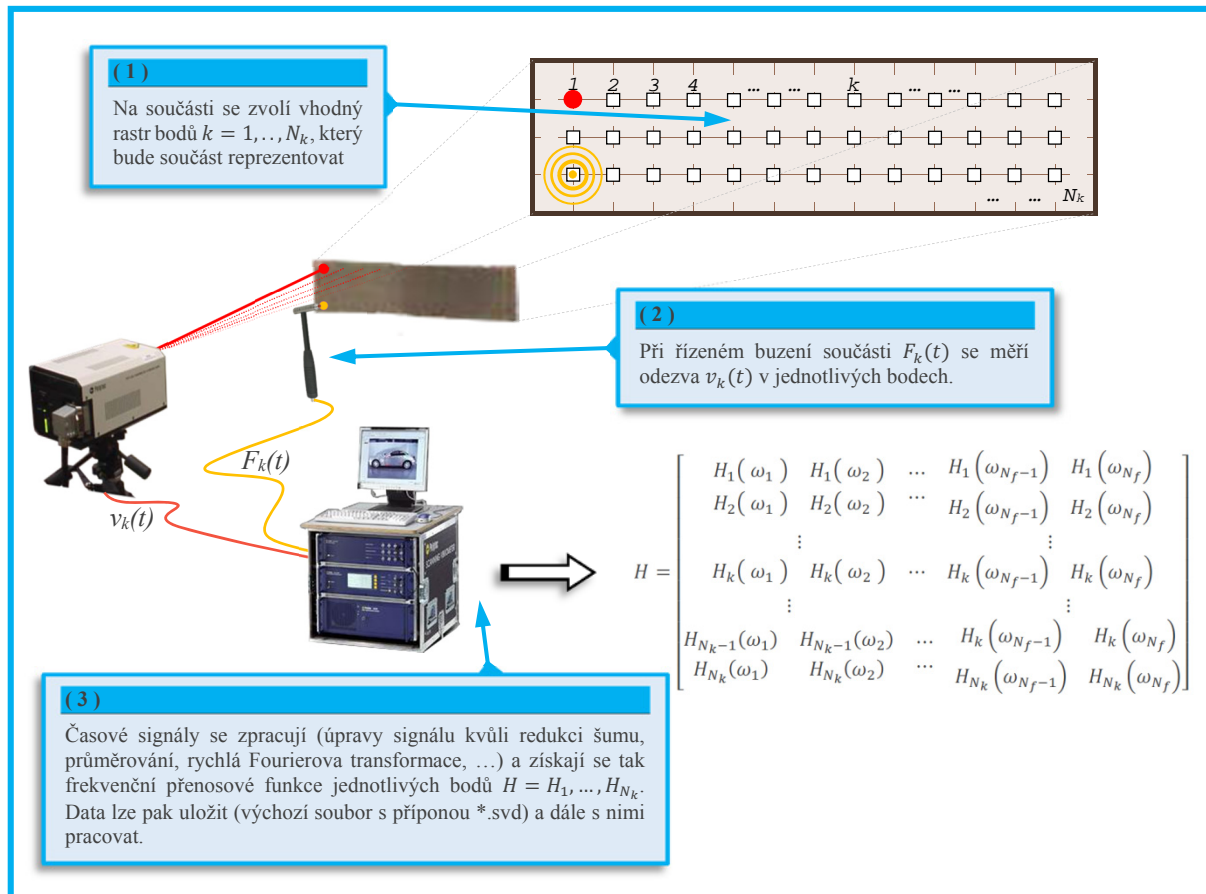
3. Postup řešení

Výchozím bodem pro práci je považované provedené měření libovolné součásti pomocí vibrometru PSV-400. Získá se tak časový průběh odezvy soustavy (rychlosti zvoleného rastru bodů na soustavě) při jejím řízeném buzení (pomocí rázového kladívka, harmonického

¹ Jedná se o algoritmus peak-picking a v literatuře [4 str. 25] je vysvětlen jeho princip a také to, že je velmi nevhodný pro zjišťování přesnějších hodnot zejména poměrných tlumení, kdy se chyba správného určení může pohybovat i v řádech 100%.

² Právě teorií a praktickým použitím SDOF metod se zabývala i má bakalářská práce, kde metoda na identifikaci modálních parametrů vibrometru PSV patří vůbec k nejméně použitelným [4].

signálu). Software vibrometru, pomocí Fourierovy transformace a dalších úprav signálu na potlačení chyb a šumu, převede časový signál do frekvenční oblasti. Tím se získají frekvenční přenosové funkce pro zvolený rastr bodů na soustavě. Schéma celého postupu je naznačeno na Obr. 2. Data ve formě frekvenčních přenosových funkcí je pak možno exportovat v několika souborových formátech. Pro naše účely se využije standardní výchozí typ souboru (*.svd), který software PSV používá. Po získání tohoto souboru je možné již přejít k vlastní části práce, která v první řadě zahrnuje export naměřených dat do prostředí Matlab.



Obr. 2 – Schéma měření pomocí vibrometru PSV-400

3.1 Export naměřených dat z PSV-400 do Matlabu

Aby bylo možno přistupovat do datové struktury souboru, poskytuje firma Polytec přidavnou aplikaci Polytec File Access (PFA), která je volně ke stažení na jejich internetových stránkách. Ta umožňuje vyhledávání a modifikaci Polytec dat prostřednictvím externích aplikací podporujících Microsoft Component Object Model (COM)³, jako je např. Visual Basic, Matlab a další. Díky COM standartu lze z datového souboru získávat potřebná data – v našem případě vše realizováno pomocí objektových příkazů Matlabu. Nevýhodou tohoto přístupu je rozsáhlá objektová struktura souboru, která komplikovala práci při hledání potřebných dat (lze zde najít nastavení veškerých atributů softwaru při měření, geometrii měřených bodů, naměřená data a také zpracované výsledky).

³ Jedná se komponentové programování od firmy Microsoft, které je nezávislé na programovacím jazyce i na platformě a umožňuje komunikaci mezi objekty jak v rámci jedné i více aplikací, a to jak jednoho počítače, tak i počítačů po síti [5].

Pro další práci byly vytvořeny dva základní algoritmy, které z výstupního souboru exportují: *geometrii rastru měřených bodů* (kartézské souřadnice a spojnice jednotlivých bodů) a *naměřená data* (ve formě jednotlivých frekvenčních přenosů). Geometrie a spojnice jednotlivých bodů se využijí pro zobrazení vlastních tvarů, frekvenční přenosy pak pro identifikaci modálních parametrů soustavy.

K identifikaci se využívá vhodný matematický model s následnou regresí naměřených dat tímto modelem. Existuje celá řada přístupů: od jednodušších, pomocí tzv. modálních modelů s jedním stupněm volnosti (SDOF modely), kdy se provádí regrese naměřených dat po částech se zjednodušenými předpoklady (viz případ softwaru Polytec), až po komplexní přístupy s modely s více stupni volnosti (MDOF modely) s obecným tvarem přenosové funkce ve formě maticového podílu polynomů. Ačkoliv se matematické modely v modálním tvaru nejvíce blíží fyzikálnímu výkladu kmitavého chování struktur, tak většina technik na identifikaci modálních parametrů neidentifikuje přímo tento model. Je totiž nelineární v hledaných parametrech, což činí značné matematické obtíže.

Jelikož byl hlavní cíl práce kladen především na rychlou a „nezjednodušenou“ identifikaci modálních parametrů, byla použita metoda, která se v posledních letech považuje za jakýsi standart experimentální modální analýzy. Jedná se o optimalizovanou lineární metodu nejmenších čtverců s diskrétní proměnnou $z_f = e^{i\omega_f T_s}$ s následným použitím stabilizačního diagramu. Odvození této metody a princip určení modálních parametrů na základě stabilizačního diagramu je nastíněn v následujících kapitolách.

3.2 Struktura algoritmu lineární metody nejmenších čtverců

Co se týče metody lineárních nejmenších čtverců, tak jde v podstatě o MDOF metodu s obecným tvarem přenosové funkce ve formě maticového podílu polynomů [1 str. 17-21]. Avšak vzhledem ke globálnímu charakteru pólů mechanického systému, lze tento obecný tvar přepsat na model polynomů se společným jmenovatelem. Naměřené frekvenční přenosové funkce (FRF) v jednotlivých bodech zvoleného rastru $k = 1, 2, \dots, N_k$ jsou modelovány pro vzorkované frekvence ω_f jako

$$\hat{H}_k(z_f, \theta) = \frac{B_k(z_f, \beta_k)}{A(z_f, \alpha)} \quad (1)$$

$B_k(z_f, \theta)$ charakterizuje polynom v čitateli pro k -tý měřený bod rastru a $A(z_f, \theta)$ je polynom tvořící společný jmenovatel přenosových funkcí. Tyto polynomy je možno vyjádřit jako

$$B_k(z_f, \beta_k) = \sum_{j=0}^n b_{kj} z_f^j \quad A(z_f, \alpha) = \sum_{j=0}^n a_j z_f^j \quad (2)$$

Koeficienty a_j a b_{kj} jsou neznámé parametry, označené pomocí θ , které je potřeba určit.

$$\beta_k = \begin{bmatrix} b_{k0} \\ b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} \beta_k \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

Řád obou polynomů je charakterizován hodnotou n . Tato hodnota je však pro měřený mechanický systém neznámá. Tento problém se řeší na základě tzv. stabilizačního diagramu,

jehož popis bude zmíněn v další kapitole. Nejdříve je však nutno ukázat určení modálních parametrů na základě tohoto modelu pro obecnou hodnotu stupně polynomů n .

Chybu mezi naměřenou a odhadovanou FRF pro libovolnou frekvenci ω_f lze vyjádřit následujícím vztahem

$$e_k^{NLS}(\omega_f, \theta) = \hat{H}_k(z_f, \theta) - H_k(\omega_f) = \frac{B_k(z_f, \beta_k)}{A(z_f, \alpha)} - H_k(\omega_f) \quad (4)$$

Tato nelineární forma se dá převést na lineární za předpokladu, že $e_k^{NLS}(\omega_f, \theta) \approx 0$

$$e_k^{LS}(\omega_f, \theta) = B_k(z_f, \beta_k) - A(z_f, \alpha) \cdot H_k(\omega_f) \quad (5)$$

Pro měřený frekvenční rozsah $\omega_1, \dots, \omega_{N_f}$ lze chybu sestavit v maticovém tvaru

$$e_k^{LS}(\theta) = \begin{bmatrix} e_k(\omega_1, \theta) \\ e_k(\omega_2, \theta) \\ \vdots \\ e_k(\omega_{N_f}, \theta) \end{bmatrix} = [\Gamma_k \quad \Phi_k] \cdot \begin{bmatrix} \beta_k \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (6)$$

kde zavedené proměnné Γ_k a Φ_k mají tvar

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} z^0(\omega_1) & z^1(\omega_1) & \dots & z^n(\omega_1) \\ z^0(\omega_2) & z^1(\omega_2) & \dots & z^n(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^0(\omega_{N_f}) & z^1(\omega_{N_f}) & \dots & z^n(\omega_{N_f}) \end{bmatrix} \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} -H_k(\omega_1) \cdot [z^0(\omega_1) & \dots & z^n(\omega_1)] \\ -H_k(\omega_2) \cdot [z^0(\omega_2) & \dots & z^n(\omega_2)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -H_k(\omega_{N_f}) \cdot [z^0(\omega_{N_f}) & \dots & z^n(\omega_{N_f})] \end{bmatrix} \quad (7)$$

Celkovou chybu $l(\theta)$ pak lze vyjádřit pomocí sumací, a to přes všechny chyby pro jednotlivé frekvence $\sum_{f=1}^{N_f} |e_k^{LS}(\omega_f, \theta)|^2$ a zároveň je tato chyba sumována přes všechny naměřené přenosové funkce $\sum_{k=1}^{N_k} \sum_{f=1}^{N_f} |e_k^{LS}(\omega_f, \theta)|^2$. Jedná se o minimalizaci funkce, která je vyjádřena maticově s komplexními prvky⁴, a proto

$$l(\theta) = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{f=1}^{N_f} |e_k^{LS}(\omega_f, \theta)|^2 = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{f=1}^{N_f} [\beta_k \quad \alpha]^H \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_k^H \Gamma_k & \Gamma_k^H \Phi_k \\ \Gamma_k \Phi_k^H & \Phi_k^H \Phi_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_k \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (8)$$

Při této formulaci by neznámé koeficienty vektorů β_k a α vycházely jako komplexní, protože sestavená matice s prvky Γ_k a Φ_k obsahuje komplexní čísla. To sice není problém a má to i některé výhody z hlediska úspory výpočtového času (póly pak nevycházejí komplexně sdružené a stačí volit poloviční stupeň polynomů). Nicméně, co se přesnosti výsledků týče, je výhodnější pracovat s koeficienty reálnými. To lze zajistit následující úpravou, kdy se bude

⁴ Jelikož je minimalizační funkce e_k vyjádřena maticově a prvky matice jsou komplexní, tak je $|e_k|^2 = e_k^H \cdot e_k$. Kde e_k^H je hermitovsky sdružená matice a lze ji získat transpozicí a komplexním sdružením původní matice e_k .

brát v úvahu pouze reálná část prvků sestavené matice. Navíc lze tyto prvky sečíst pro jednotlivé vzorkované frekvence a výsledný tvar minimalizační funkce je pak dán vztahem (9) s nově zavedenými proměnnými R_k, S_k, T_k .

$$l(\theta) = \sum_{k=1}^{N_k} \sum_{f=1}^{N_f} |e_k^{LS}(\omega_f, \theta)|^2 = \sum_{k=1}^{N_k} [\beta_k \quad \alpha]^T \cdot \begin{bmatrix} R_k & S_k \\ S_k^T & T_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_k \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (9)$$

Tyto nové proměnné se vyjádří pomocí následujících vztahů, kde čísla r, s charakterizují číslo řádku, sloupce v matici

$$R_{k[r,s]} = Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_k^H \Gamma_k \right] = Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} \left[(z^{r-1}(\omega_f))^H \cdot z^{s-1}(\omega_f) \right] \right] \quad (10)$$

$$S_{k[r,s]} = -Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} \Gamma_k^H \Phi_k \right] = -Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} H_k(\omega_f) \left[(z^{r-1}(\omega_f))^H \cdot z^{s-1}(\omega_f) \right] \right] \quad (11)$$

$$T_{k[r,s]} = Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} \Phi_k^H \Phi_k \right] = Re \left[\sum_{f=1}^{N_f} |H_k(\omega_f)|^2 \left[(z^{r-1}(\omega_f))^H \cdot z^{s-1}(\omega_f) \right] \right] \quad (12)$$

Takto sestavené matice mají dvě velmi důležité vlastnosti, díky nimž je jejich konstrukce z hlediska algoritmizace mnohem snazší a efektivnější.

⇒ **Toeplitzova struktura matic** – jedná se o čtvercové matice, které mají prvky konstantní podél každé své diagonály. V tomto případě mají matice R_k, S_k, T_k rozměry $[(n+1), (n+1)]$ s následující obecnou strukturou:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_Z^0 & \Sigma_Z^1 & \cdots & \Sigma_Z^{n-1} & \Sigma_Z^n \\ \Sigma_Z^{-1} & \Sigma_Z^0 & \cdots & \Sigma_Z^{n-2} & \Sigma_Z^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Sigma_Z^{-(n-1)} & \Sigma_Z^{-(n-2)} & \cdots & \Sigma_Z^0 & \Sigma_Z^1 \\ \Sigma_Z^{-n} & \Sigma_Z^{-(n-1)} & \cdots & \Sigma_Z^{-1} & \Sigma_Z^0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_Z^n \text{ je operátor, který je definovaný pro diskretní model jako}$$

$$\Sigma_Z^n = \sum_{f=1}^{N_f} G(\omega_f) \cdot e^{i\omega_f T_s n}$$

a proměnná $G(\omega_f)$ závisí na typu matice. Pro R_k je $G(\omega_f) = 1$, v případě matice T_k je funkce rovna $G(\omega_f) = |H_k(\omega_f)|^2$ a pro S_k je to $G(\omega_f) = H_k(\omega_f)$.

⇒ **Matice R_k a T_k jsou hermitovské** – hermitovská matice je čtvercová matice s komplexními prvky (a_{rs}), která splňuje pro všechny dvojice r, s rovnost $(a_{rs})^* = a_{sr}$. Tuto vlastnost lze pro tento případ využít následujícím způsobem: $\Sigma Z^{-n} = (\Sigma Z^n)^*$.

Výsledkem rozboru těchto vlastností je důležitý poznatek. Pro sestavení celkových matic R_k a T_k je potřeba určit pouze prvky v prvním řádku každé matice a pro sestavení matice S_k je potřeba určit prvky v prvním řádku a sloupci.

Parciální derivací minimalizační funkce (9) podle neznámých vektorů β_k a α se pak získají výsledné vztahy pro výpočet hledaných koeficientů. Výsledkem jsou „dvě“ rovnice (v maticovém tvaru) o „dvou“ neznámých (vektorech). Vyjádření neznámého vektoru α vede k velmi kompaktnímu tvaru (13), protože matice D si stále zachovává rozměr matic T_k, R_k, S_k , tedy $[(n + 1), (n + 1)]$, kde n je zvolený řád polynomu.

$$\left[\sum_{k=1}^{N_k} (T_k - S_k^T R^{-1} S_k) \right] \alpha = D \alpha \approx 0 \quad (13)$$

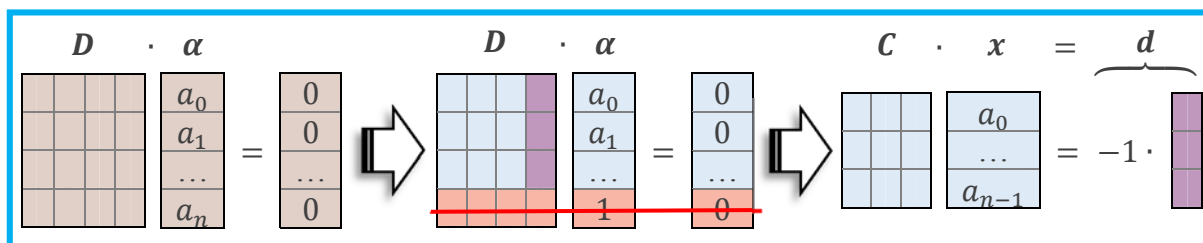
Vztah je nutno upravit tak, aby se předešlo získání triviálního řešení (všechny složky vektoru α nulové). Tomu se lze vyhnout tím, že jeden prvek vektoru α se určí jako nenulová hodnota. Pro odhadnutí toho prvku lze vyjít z jednoho z matematických tvarů modálního modelu pro systém s více stupni volnosti, který lze interpretovat například vztahem

$$H_k = \sum_{n=1}^N \frac{n A_k}{\lambda_n^2 - \omega^2} \quad (14)$$

Po rozepsání sumy a převodu na společný jmenovatel (tedy převod na polynomický tvar) je možno odhadnout koeficient u nejvyššího řádu jmenovatele. Jeho hodnota je rovna jedné. V tom případě přejde řešení rovnice (13) na tvar:

$$C x = d \quad (15)$$

$$C = D_{[1:n,1:n]} \quad , \quad d = -D_{[1:n,n+1]}$$



Obr. 3 – Přejde od triviálního řešení k obecnému

Tímto způsobem se lze jednoduše vyhnout triviálnímu řešení a výsledné koeficienty α jsou určeny hodnotami:

$$\alpha = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Po dosažení vektoru α do druhé rovnice získané parciálními derivacemi minimalizační funkce se získá řešení pro jednotlivé β_k .

Protože je cílem určit modální parametry z modálního modelu, je potřeba transformovat polynomický model se společným jmenovatelem (1) na pól-residuovou parametrizaci danou rovnicí (14).

- **Póly:** póly jsou získány jako kořeny polynomu s koeficienty α . Z pólů jsou pak určeny vlastní frekvence a poměrné tlumení ze známého tvaru vlastního čísla $\lambda_n = -\zeta_n \omega_0 \pm \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_n^2}$, kde $\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_n^2}$

$$f_n = \frac{\text{Im}(\lambda_n)}{2\pi} \quad \zeta_n = \frac{\text{Re}(\lambda_n)}{|\lambda_n|} \quad (17)$$

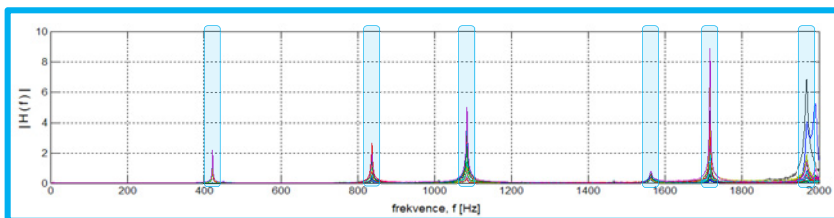
- **Residua:** residua odpovídající jednotlivým pólům λ_n lze spočítat ze známých koeficientů polynomů θ , a to následujícím způsobem pro jednotlivé $k = 1, 2, \dots, N_k$

$${}_n R_k = \lim_{z_f \rightarrow \lambda_n} \hat{H}_k(z_f, \theta) \cdot (z_f - \lambda_n) \quad (18)$$

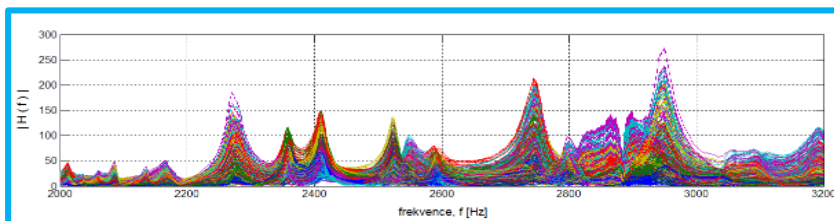
Pomocí získaných residuí a jejich dalších úprav se interpretují vlastní tvary měřené součásti.

Jelikož je použit pól-residuový model s diskretním časem, je potřeba získané póly a residua transformovat do Laplaceovy proměnné. Vlastní frekvence a poměrná tlumení se pak získají použitím vztahu (17). Transformace přenosové funkce z polynomiálního vyjádření do pól-residuového je otázkou jednoduchých matematických úprav. Matlab navíc obsahuje několik implementovaných funkcí, které umí mezi těmito transformacemi libovolně přecházet a lze tak snadno residua a póly získat přímo zadáním koeficientů polynomů.

Tímto postupem je tedy možno získat modální parametry z naměřených dat. Jediným problémem je neznámý řád polynomů, hodnota n . Stupeň polynomu se společným jmenovatelem (charakteristický polynom) přímo souvisí s počtem pólů. Dalo by se tedy říci, že postačí určit počet vlastních frekvencí v naměřeném frekvenčním rozsahu (vlastní frekvence se dají identifikovat z amplitudo-frekvenční charakteristiky jako amplitudové špičky) a podle toho zvolit vhodnou hodnotu n , viz *Obr. 5*. Jelikož však nelze vždy úplně přesně odhadnout jejich počet (např. pokud jsou vlastní frekvence příliš blízko sebe), není tento přístup příliš vhodný, viz *Obr. 4*.



Obr. 5 – Příklad amplitudo-frekvenční charakteristiky s dobře oddělenými módy, viditelně se dá identifikovat 6 vlastních frekvencí $\Rightarrow n = 12$



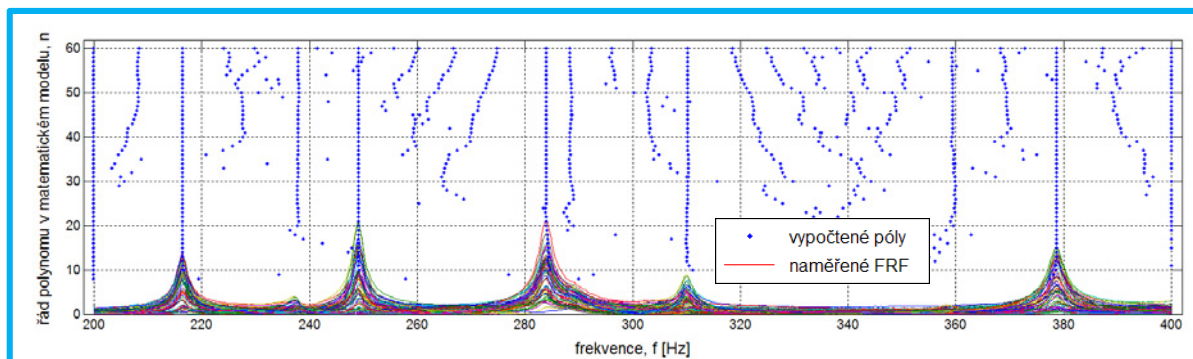
Obr. 4 – Příklad amplitudo-frekvenční charakteristiky s úzce svázanými módy, špatně odhadnutelný počet vlastních frekvencí $\Rightarrow n = ??$

Navíc z důvodů přítomnosti šumu v naměřených datech a možných chyb zavedeného modelu⁵, je nutné použít řád polynomů mnohem vyšší než je reálný počet pólů systému, aby byly identifikovány veškeré skutečné (též fyzikální) póly systému [2 str. 125]. Tento způsob řešení však s sebou přináší další problémy ve formě nadbytečných pólů, které s reálnou soustavou vůbec nesouvisí, jedná se o tzv. matematické póly. K rozlišení matematických a reálných pólů slouží stabilizační diagram, jehož konstrukce a řešení je představeno v následující části textu.

3.3 Konstrukce stabilizačního diagramu

Za účelem pomoci uživateli rozlišit matematické a fyzikální póly, které by se ručně jen těžko rozpoznávaly, byl navržen tzv. stabilizační diagram. Ten slouží jako jakýsi filtr pro matematické póly, kdy se využívá některých vlastností fyzikálních pólů. Fyzikální póly se vyznačují zápornou hodnotou jejich reálné složky, protože měřená soustava je stabilní (tato vlastnost se dá zapsat jako: $\zeta > 0$). Navíc fyzikální póly mají tendenci se stabilizovat při zvyšujícím se řádu polynomů. Tzn., že hodnoty vlastní frekvence a tlumení identifikovaného fyzikálního pólu se se zvyšujícím řádem matematického modelu již příliš nemění. Narozdíl od toho matematické póly vznikají „náhodným“ způsobem. Konstrukci stabilizačního diagramu je možno rozdělit na několik kroků, kdy se budou postupně matematické póly filtrovat:

- a) Stabilizační diagram je ve své podstatě zobrazení vypočtených pólů do grafu naměřených přenosových funkcí, viz *Obr. 6*. A to takovým způsobem, že se postupně zvyšuje řád polynomu v zavedeném matematickém modelu a pro každý takový nový model se identifikují póly z naměřených dat. Ty jsou pak vyneseny do zmíněného grafu, kde x -souřadnice pólu je dána vlastní frekvencí pólu a y -souřadnice je dána hodnotou aktuálního řádu polynomu.



Obr. 6 – První část konstrukce stabilizačního diagramu, zobrazení pólů v FRF grafu

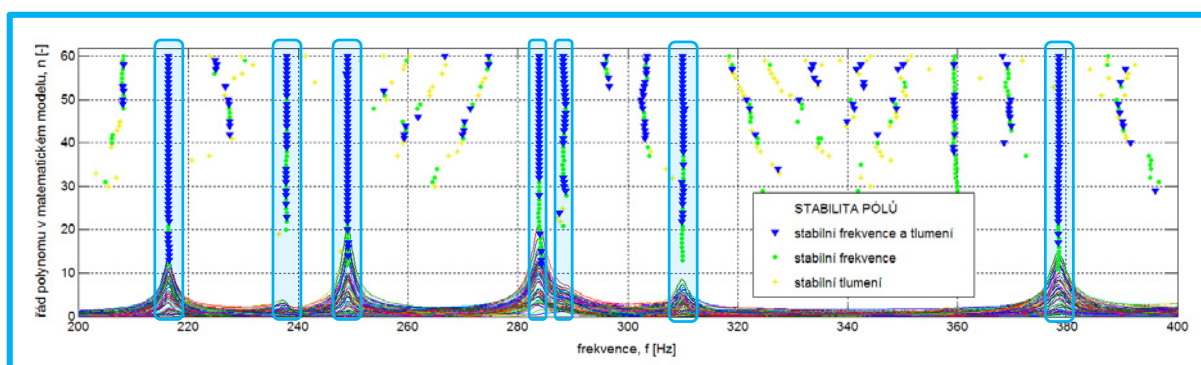
- b) Dalším krokem je odstranění pólů, které vznikají na krajích měřeného frekvenčního pásma. Tyto póly zde vznikají v důsledku jakési korekce, aby nějakým způsobem postihly vliv nižších a vyšších módů, které jsou mimo měřený frekvenční rozsah. Všechny zavedené modely totiž platí pro teoreticky nekonečný frekvenční rozsah. V případě omezení frekvenčního rozsahu a použití tohoto modelu tak tyto vzniklé póly poskytují jakousi matematickou korekci. Mají tedy čistě matematický charakter, a proto je lze z řešení odstranit.

⁵ Vypočtené přenosové funkce jsou vyjádřeny v podobě odhadu FRF, tzv. hodnot H_1 , popř. H_2 , které minimalizují šum na výtupu, popř. na vstupu [6 str. 47]. To zavedený model nezohledňuje a předpokládá přímo skutečné hodnoty přenosových funkcí H .

- c) Další póly, které je možno jednoduše odstranit, jsou tzv. nestabilní póly, které nejsou pro stabilní mechanické systémy příznačné. Pro nestabilní póly je charakteristické, že hodnota jejich reálné části je kladná (z takových pólů by poměrné tlumení vycházelo $\zeta \leq 0$).
- d) Naopak pro většinu mechanických soustav nejsou příznačné ani vysoké hodnoty tlumení, proto se odstraní také póly, jejichž poměrná tlumení vycházejí větší než např. $\zeta > 0,1$ (zvolení hodnoty této tolerance závisí i na typech měřených součástí).
- e) Nejdůležitější částí stabilizačního diagramu je zavedení relativních kritérií. Jak již bylo zmíněno, fyzikální póly mají tendenci se se zvyšujícím řádem polynomiálního modelu stabilizovat. Tzn., že pro vzrůstající řád modelu se identifikované hodnoty vlastních frekvencí a poměrných tlumení fyzikálních pólů příliš nemění. Proto lze předepsat podmínku, že pokud se hodnota vlastní frekvence nezmění o více jak několik procent při postupném zvyšování řádu modelu, označí se taková frekvence jako stabilní. Stejný postup lze aplikovat i na hodnoty poměrných tlumení. A pokud daný pól splňuje zároveň podmínku stabilní frekvence a stabilního poměrného tlumení, označí se jako stabilní pól. Stabilita identifikovaných vlastních frekvencí a poměrných tlumení se zpravidla posuzuje pro j -tý řád modelu z hodnot modelu řádu $j - 2$. Relativní kritéria pak vyjadřují dovolenou procentuální odchylku identifikovaných parametrů pro tyto dva modely, kde $j = 3, 4, \dots, n$. Procentuální odchylky se volí většinou v rozsahu 1 až 5 % [2 str. 129]. Díky tomuto je možno rozdělit všechny zbylé póly do čtyř kategorií s postupně se zvyšujícím významem:

- I. Není stabilní ani frekvence ani tlumení – póly s touto vlastností se odstraní
- II. Je stabilní pouze poměrné tlumení – většinou jde pouze o nějakou náhodnou shodu hodnot a ani tyto póly nejsou nijak významné
- III. Je stabilní pouze vlastní frekvence
- IV. Je stabilní frekvence a zároveň tlumení – tzv. stabilní pól

Po aplikaci těchto kroků je možno stabilizační diagram plně zkonstruovat a jeho výsledná podoba je na *Obr. 7*. Je výhodné jednotlivé druhy pólů také barevně odlišit podle důležitosti, aby důležité póly barevně nesplývaly s póly méně významnými.



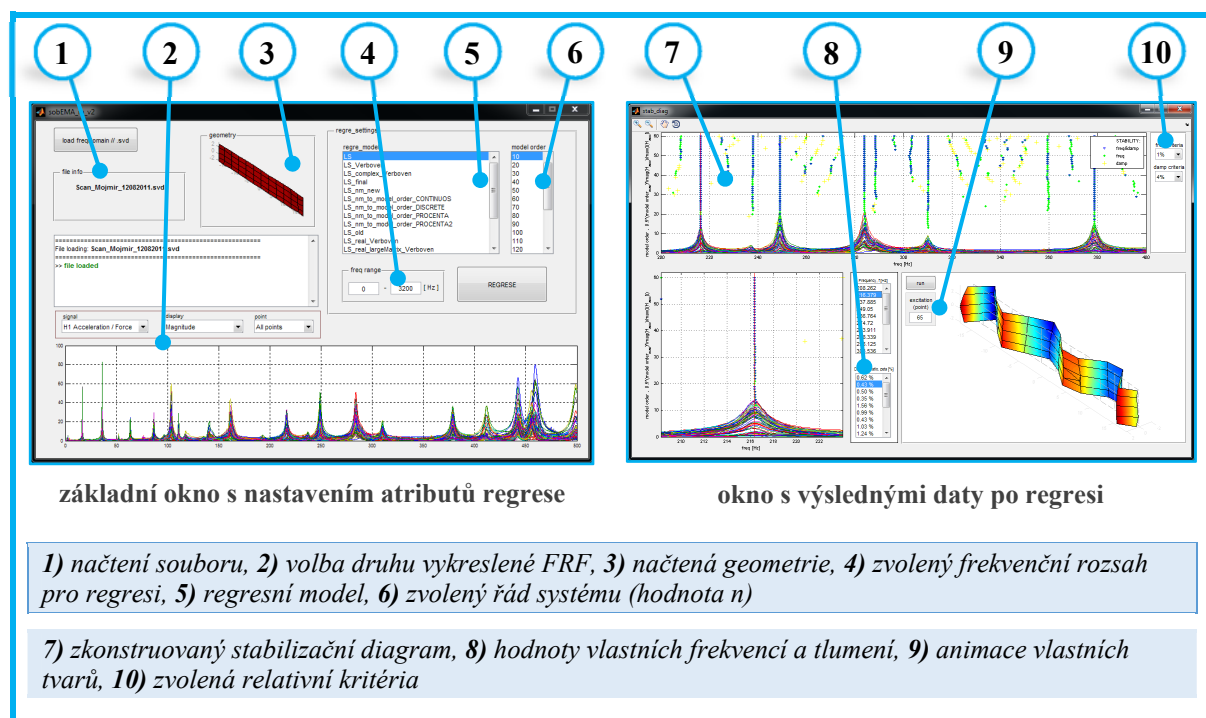
Obr. 7 – Příklad konstrukce stabilizačního diagramu s relativními kritérii pro frekvenci 1% a pro poměrné tlumení 2%

Z takto upraveného stabilizačního diagramu je pak možno viditelně identifikovat jednotlivé vlastní frekvence, které jsou stabilní pro postupně zvyšující se řád modelu (viz *Obr. 7* a obdélníkové ohraničení identifikovaných vlastních frekvencí). Z pólů, které odpovídají těmto

vlastním frekvencím se určí poměrná tlumení. Residua pro vykreslení vlastních tvarů se určí ze vztahu (18).

Vyhodnocení stabilizačního diagramu je do jisté míry subjektivní záležitostí a záleží na zkušenostech uživatele, který ho vyhodnocuje. Avšak kombinace grafického rozdělení pólů s amplitudo-frekvenční závislostí poskytuje dostatek informací na určení téměř většiny fyzikálních pólů. Navíc existují i další složitější metody na určení fyzikálních pólů, o kterých bude zmíněno v závěru článku.

Celý postup, který byl představen v předchozím textu, byl zalgoritmizován a vznikla aplikace v Matlabu vybavená grafickým uživatelským rozhraním pro praktické použití. Díky ní lze efektivně identifikovat libovolná data naměřená pomocí vibrometru PSV-400 a získat tak významně věrohodnější výsledky.



Obr. 8 – Vytvořená aplikace v Matlabu

Navíc, protože jsou výsledky ve standartním tvaru, který je charakteristický pro modální analýzu, je možno s těmito daty dále pracovat. Využit se dají například do dalších algoritmů při porovnávání vlastních tvarů, kdy se provnovávají vypočtené (pomocí MKP) a naměřené vlastní tvary (pomocí PSV-400 a následné regrese) a zjišťuje se jejich míra podobnosti (tedy i míra podobnosti MKP modelu se skutečností).

4. Porovnání výsledků navržené metody s výsledky softwaru PSV-400

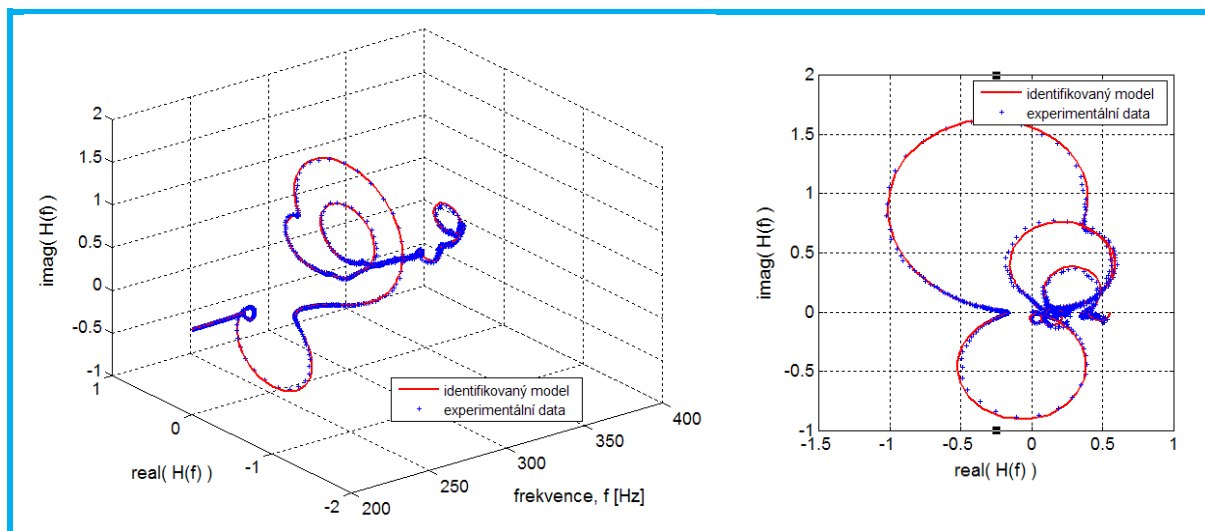
Kvalitu dosažených výsledků lze jednoduše vyhodnotit grafickým srovnáním získaného matematického modelu s naměřenými daty. Bohužel tento postup nelze aplikovat i na výsledky PSV-400, jelikož neposkytuje veškeré potřebné parametry k tomu, aby byl matematický model sestaven. Všeobecně je však známo, že algoritmus peak-picking, který software vibrometru používá, předpokládá řadu zjednodušujících úvah, a to zejména ve smyslu dostatečně oddělených jednotlivých módů, protože se jedná o SDOF algoritmus. Dále tento algoritmus také vůbec nezohledňuje fakt, že jsou data vzorkovaná. To může způsobovat poměrně velkou chybu v případech lehce tlumených módů, kdy v okolí vlastní frekvence není změřeno dostatečně množství hodnot přenosu.

K porovnání obou metod byla použita experimentální data z měření snowboardu, který lze považovat za kompozit. Načtené přenosové funkce (Obr. 8) a konstrukce stabilizačního diagramu (Obr. 6) s jeho následným vyhodnocením (Obr. 7) byly použity již v předchozích částech textu jako názorné příklady k výkladu teoretického základu. Vyšetřovaný frekvenční rozsah byl pro názornost blízkých módů zvolen v rozmezí 200 – 400Hz a k porovnání byly použity pouze parametry vlastní frekvence a poměrná tlumení. Výsledky obou metod jsou zobrazeny v Tab. 1. Vlastní vektory software vibrometru přímo neposkytuje, ale je možno je zobrazit alespoň ve formě vlastních tvarů. Módy č. 2, 5 a 6 je možno označit jako módy, které jsou značně ovlivněny většími okolními módy, což lze vidět i z průběhu FRF viz Obr. 7. V těchto případech se výsledky poměrného tlumení začínají značně lišit, neboli zjednodušující předpoklady metody peak-picking přestávají platit.

Tab. 1 – Porovnání výsledků navržené metody s výsledky softwaru PSV-400 na součásti snowboard ve frekvenčním rozsahu 200-400Hz

módy	navržený algoritmus		PSV-400	
	vlastní frekvence f [Hz]	poměrné tlumení ζ [%]	vlastní frekvence f [Hz]	poměrné tlumení ζ [%]
1	216,379	0,43	216,41	0,43
2	237,885	0,50	237,66	0,94
3	249,050	0,35	249,06	0,37
4	283,911	0,43	283,91	0,48
5	288,339	1,03	287,97	1,13
6	310,151	0,36	310,16	0,64
7	378,730	0,36	378,75	0,37

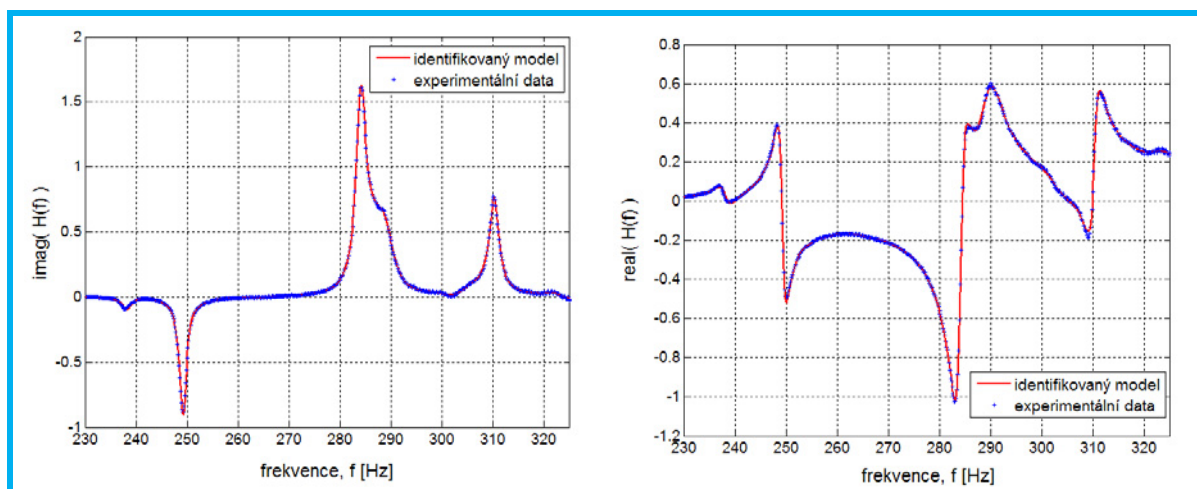
Správnost určených modálních parametrů pomocí navržené metody je možno prokázat vykreslením matematického modelu na naměřená data Obr. 9. Z uvedeného obrázku lze vidět, že identifikovaný model opravdu věrně kopíruje naměřená data.



Obr. 9 – Srovnání vypočteného matematického modelu s naměřenými daty (pro jeden zvolený měřený přenos) ve 3D a v Gaussově rovině

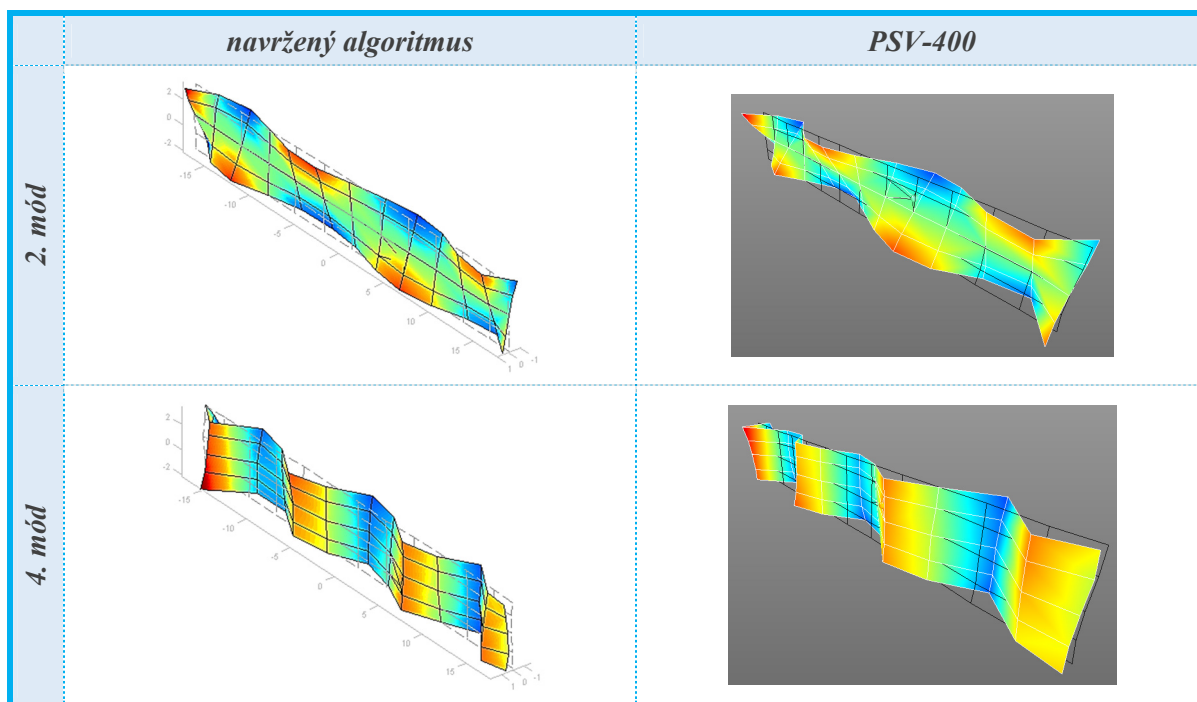
Navíc v případě přiblížení frekvenčního rozsahu cca 230 – 325 Hz pro právě nejvíce rozdílné hodnoty poměrných tlumení módů 2, 5 a 6 je dobře vidět, že identifikovaný matematický model

opravdu velmi kvalitně respektuje naměřená data a lze modální parametry považovat za správné viz *Obr. 10*.



Obr. 10 – Srovnání vypočteného matematického modelu s naměřenými daty (pro jeden zvolený měřený přenos) pro frekvenční rozsah 230 – 325 Hz v rovinách XZ a XY

Navržený model a postup tedy poskytují mnohem lepší výsledky u svázaných módů ve srovnání se softwarem vibrometru. U méně ovlivněných módů pak koriguje zanedbávání vzorkování, které metoda peak-picking nezohledňuje. Výsledkem je tedy identifikovaný matematický model, který velmi dobře respektuje naměřená data. Pro úplnost ještě zobrazení vybraných vlastních tvarů. Zde není patrný příliš velký rozdíl, neboť pro vizualizaci je k dispozici v případě měření snowboardu velké množství bodů přenosové funkce v okolí vlastních frekvencí, které nepřesnost identifikace metodou peak-picking kompenzuje. Nicméně v některých případech je možno pozorovat vyhlazení vlastních tvarů oproti PSV-400.



Obr. 11 – Srovnání vybraných vlastních tvarů

5. Závěr

Podrobně byly prostudovány některé algoritmy experimentální modální analýzy a byl představen pokročilý algoritmus na identifikaci modálních parametrů – optimalizovaná lineární metoda nejmenších čtverců s diskretní proměnnou z v kombinaci s použitím stabilizačního diagramu, který napomáhá při určování výsledných skutečných pólů systému.

S výhodou byla tato metoda použita v kombinaci spolu s daty naměřenými pomocí vibrometru PSV-400. To zahrnovalo již praktickou část práce, a to zvládnutí komunikace s datovým modelem vibrometru pomocí knihoven Polytec z prostředí Matlab. Dále bylo navrženo a naprogramováno prostředí, ve kterém je možno pracovat s měřenými daty a použít právě představený algoritmus optimalizované lineární metody nejmenších čtverců se stabilizačním diagramem. Prostředí je otevřené a počítá se s implementací dalších regresních algoritmů a podpůrných podprogramů zejména pro porovnávání vlastních tvarů.

Programové prostředí bylo využito při analýze reálných experimentálních dat při výzkumu vlastností snowboardu a na těchto výsledcích bylo také prokázáno, že použitá metoda poskytuje věrohodnější výsledky a především je k dispozici plný matematický model, se kterým lze dále pracovat.

6. Doporučení pro další postup

Jak již bylo zmíněno v textu, použitý model zcela nerespektuje naměřená data. Naměřená data jsou totiž vyjádřena ve formě odhadu FRF – hodnot H_1 a obsahují šum. Proto je nutné rozšířit původní parametrický model o další polynom respektující i složky šumu. I takto upravený model, lze podobným způsobem převést na velmi kompaktní řešení s následujícím využitím stabilizačního diagramu [3 str. 75].

Stabilizační diagram jakožto prostředek pro identifikaci fyzikálních pólů však ne vždy dokáže identifikovat všechny pravé póly. Závisí to na kvalitě naměřených dat a také na zkušenosti uživatele, který stabilizační diagram vyhodnocuje. Proto existují i další složitější varianty v podobě např. shlukové analýzy, která využívá jiných vlastností pólů. Navíc tímto způsobem lze celý proces identifikace lépe zautomatizovat a není potřeba taková interakce s uživatelem. Blíže se tomuto postupu věnuje literatura [2 str. 181].

Seznam použitých symbolů

\hat{H}_k	odhad k -tého přenosu
k	k -tý výstup
$F_k(t)$	časový průběh síly při měření k -tého výstupu
$v_k(t)$	časový průběh rychlosti při měření k -tého výstupu
β_k	vektor koeficientů polynomu v čitateli pro k -tý výstup
α	vektor koeficientů polynomu ve jmenovateli
N_k	počet měřených výstupů
N_f	počet vzorkovaných frekvencí
$z_f = e^{i\omega_f T_s}$	diskretní proměnná z v rovině pro vzorkovanou frekvenci
f	frekvence
T_s	vzorkovací čas
ω	úhlová frekvence, $\omega = 2\pi f$

${}_n A_k$	modální konstanta k -tého výstupu pro vlastní frekvenci n
λ_n	n -té vlastní číslo
f_n	n -tá vlastní frekvence tlumeného systému
ζ_n	poměrné tlumení odpovídající n -té vlastní frekvenci
ω_0	úhlová vlastní frekvence netlumeného systému
ω_n	n -tá úhlová vlastní frekvence tlumeného systému
${}_n R_k$	residuum k -tého výstupu odpovídající n -tého pólu
n	řád systému
H_1	odhad přenosové funkce s minimalizací šumu na vstupu
H_2	odhad přenosové funkce s minimalizací šumu na výstupu
H	skutečné hodnoty přenosové funkce
$B_k(z_f, \beta_k) = \sum_{j=0}^n b_{kj} z_f^j$	polynom čitatele k -tého výstupu rozšířený do roviny z
$A(z_f, \alpha) = \sum_{j=0}^n a_j z_f^j$	polynom jmenovatele rozšířený do roviny z

Bibliografie

- [1] **Parloo, Eli.** *Application of frequency-domain system identification techniques in the field of operational modal analysis, Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Department (WERK).* Brussels : Vrije Universiteit Brussel, May 2003.
- [2] **Verboven, Peter.** *Frequency-domain system identification for modal analysis, Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Department (WERK).* Brussels : Vrije Universiteit Brussel, May 2002.
- [3] **Cauberghe, Bart.** *Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis, Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Department (WERK).* Brussels : Vrije Universiteit Brussel, May 2004.
- [4] **Sobotka, Petr.** *Implementace algoritmů experimentální modální analýzy, bakalářská práce.* Praha : ČVUT v Praze, červen 2012.
- [5] **Grygarek, Petr.** Osobní stránka Petra Grygarka. [Online] [Citace: 18. březen 2013.] <http://www.cs.vsb.cz/grygarek/dosys/present/COM/sld007.htm>.
- [6] **Miláček, Stanislav.** *Měření a vyhodnocování mechanických veličin.* Praha : Vydavatelství ČVUT, 2001. 80-01-02417-2.