

# Matematická a experimentální analýza namáhání rotujícího prstence ovinovacího balicího stroje

Bc. Josef Kamenický

Vedoucí práce: Ing. Jiří Mrázek, Ph.D.; Ing. František Starý

## Abstrakt

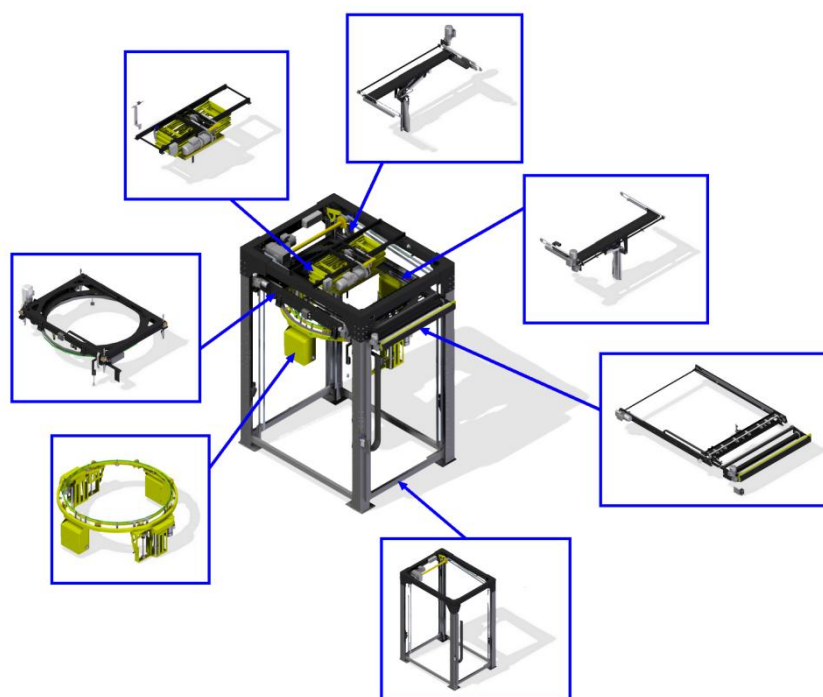
Tématem této práce je popis namáhání prstence rotujícího v ovinovacím balicím stroji Rotomatic Profi Double. Na prstenci jsou zavěšeny rámy cívek a elektrorozvaděče, které při vysokých otáčkách způsobují namáhání. V první části práce je řešen matematický popis namáhání. K výpočtům je použita jak analytická metoda, tak i metoda konečných prvků. V druhé části je popsáno experimentální zjišťování namáhání prstence. Na vybraných místech byly měřeny deformace pomocí tenzometrů.

## Klíčová slova

Rotomatic Profi Double, porovnání analytické metody s MKP, tenzometrické měření

## 1. Úvod

Ovinovací balicí stroj Rotomatic Profi Double slouží k balení zboží před expedicí z výrobního závodu. Umísťuje se buď přímo nad válečkové dopravníky, nebo se do něho paleta vkládá manipulačním zařízením. Zboží je srovnáno na dřevěné paletě (zpravidla Euro paleta) a paleta i se zbožím se důkladně ovine do tzv. stretch folie. Tím celý sloupec zboží na paletě získá kromě ochrany také vyšší stabilitu.

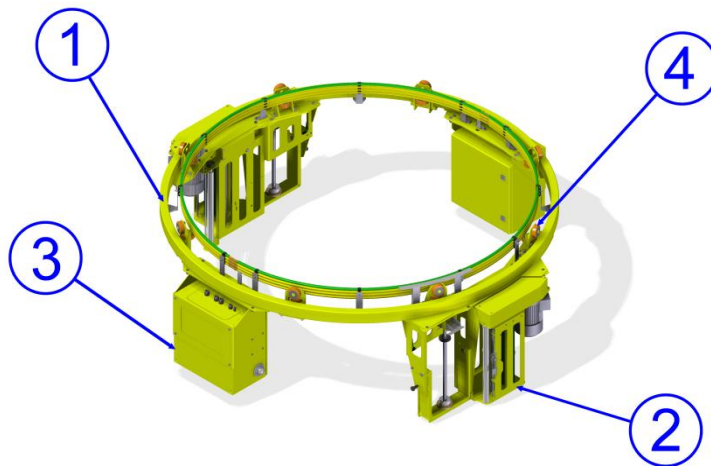


Obr. 1. Konstrukce stroje Rotomatic Profi Double

Konstrukce stroje Rotomatic Profi Double je patrná z obr. 1. V rámu stroje je na řetězech zavěšen rám prstence. V něm rotuje prstenec s cívkami stretch folie. V horní části stroje se nachází přidržovač, který zajišťuje stabilitu zboží během balicího cyklu. Dále je na rámu prstence překrývací mechanismus, který folii překryje vrchní stranu sloupce zboží. Posledními částmi jsou mechanismy k zakončení folie, ty jsou umístěny taktéž na rámu prstence. Po zabalení palety se zbožím upraví konec stretch folie tak, aby nedošlo k samovolnému rozbalení, a zároveň konec folie drží do nového cyklu.

## 2. Popis prstence

Sestava prstence je složena z několika základních celků. Na obr. 2 jsou tyto celky číselně označeny. Nosnou částí je zakroužený tenkostěnný uzavřený profil (1). K němu jsou přimontovány dva protilehlé rámy cívek (2) a dva protilehlé elektrické rozvaděče (3).



*Obr. 2. Konstrukce stroje Rotomatic Profi Double*

Cívky se stretch folií jsou umístěny ve dvou protilehlých rámech připevněných na rotujícím prstenci. Na něm se také nachází elektrické rozvaděče, taktéž proti sobě a vůči rámcům cívek posunuty o 90°. Prstenec rotuje v rámu prstence maximální rychlostí 60 otáček za minutu. Prstenec je v rámu veden pomocí kladek, které pojíždějí shora a z vnitřní strany zkrouženého L profilu. Rám prstence je umístěn v rámu stroje, ve kterém vykonává posuvný vertikální pohyb.

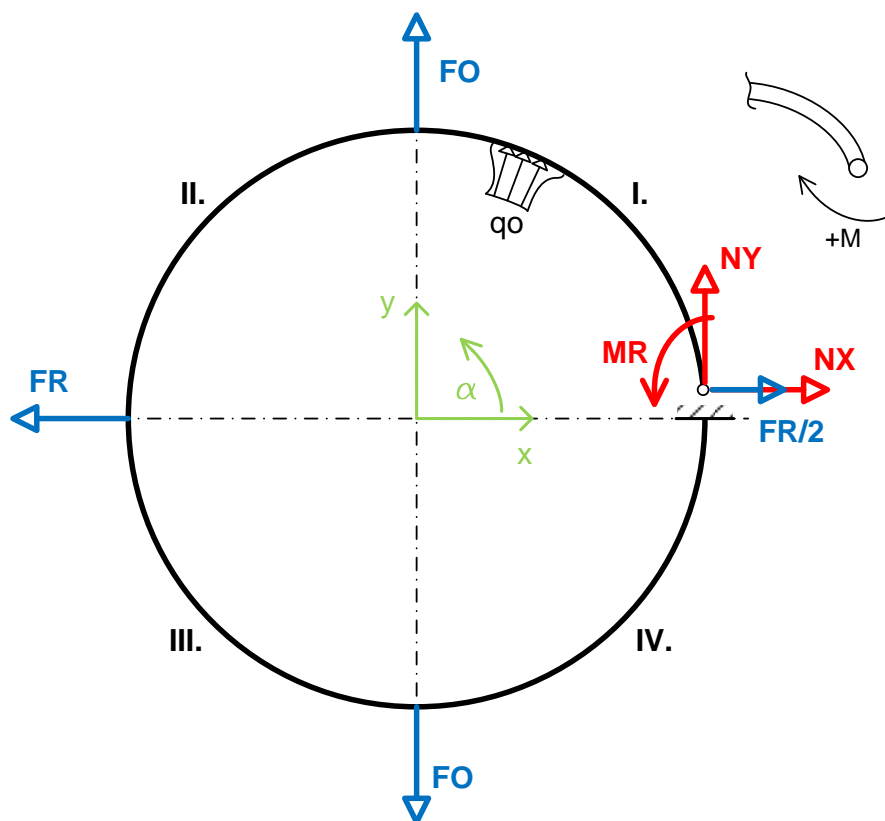
Porovnáním odstředivých sil jednotlivých celků, působících při otáčkách 60 min<sup>-1</sup>, jsme získali přehled o vlivech jednotlivých celků na namáhání prstence. Největší vliv mají samozřejmě součásti s nejvyšší hmotností. Hmotnost každého rámu cívek, včetně samotných cívek folie, je 93,04 kg, rozvaděče 50,12 kg a vlastního prstence 68,2 kg. Menší vliv má také odstředivá síla působící na každý element profilu prstence. V následných výpočtech je tedy uvažováno se silami od rámců cívek, elektrických rozvaděčů a také s odstředivou silou vlastního prstence.

### 3. Výpočtové modely

K analytickému výpočtu byl použit jeden výpočtový model a k výpočtu pomocí MKP byly použity dva typy modelů. Síly od rámu cívek jsou značeny FO, od elektrických rozvaděčů pak FR. Síly FR byly ve výpočtových modelech umístěny pod úhly 0 a  $\pi$ . Síly FO byly umístěny pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$ . Výpočtem odstředivé síly rozvaděče a rámu cívky byly zjištěny tyto hodnoty:  $FR= 2\,324,93\text{ N}$  a  $FO= 4\,315,86\text{ N}$ .

#### 3.1 Model pro analytický výpočet

Pro analytický výpočet je zaveden tento model: rám – v podstatě zakřivený prut, zatížený čtyřmi silami a spojitým zatížením. Schéma tohoto modelu je znázorněno na obr. 3. Síly působící na prut odpovídají odstředivým silám od dvou protilehlých rámu cívek a dvou protilehlých elektrických rozvaděčů. Spojité zatížení odpovídá vlastní odstředivé síle od rotace prstence.

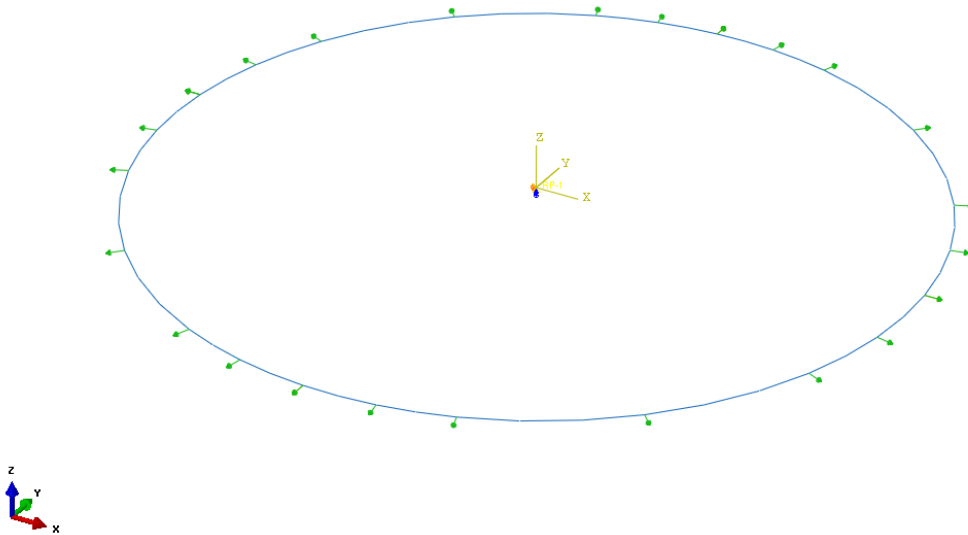


Obr. 3. Model pro analytický výpočet

#### 3.2 Model „wire“ pro výpočet MKP

Jedná se o drátový model, který svým zadáním a chováním odpovídá modelu pro analytický výpočet. Schéma tohoto modelu je uvedeno na obr. 4. Na drát působí čtyři síly umístěné po  $\pi/2$  a odstředivá síla vznikající rotací prstence. Velikost těchto sil je shodná se silami v modelu analytického výpočtu. Síly jsou zadány manuálně dle hodnot vypočtených pro

danou úhlovou rychlost prstence. Velikost vlastní odstředivé síly prstence je zadána úhlovou rychlostí. Drát je spojen se středovým bodem pomocí Coupling – Continuum distributing, a tento bod má definovány nulové posuvy ve všech třech směrech a také jsou definována nulová natočení v tomto bodě.

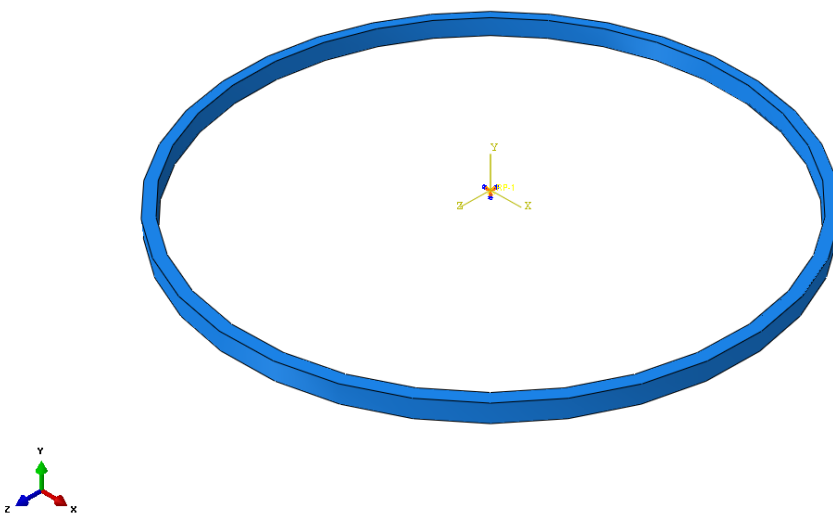


*Obr. 4. Drátový model pro výpočet MKP*

### 3.3 Model „solid“ - prstenec pro výpočet MKP

Prstenec je zde vymodelován jako těleso. Síly jsou zadány stejným způsobem jako u předchozího modelu. Taktéž vlastní odstředivá síla prstence je zadána pomocí úhlové rychlosti prstence. Model je zobrazen na obr. 5.

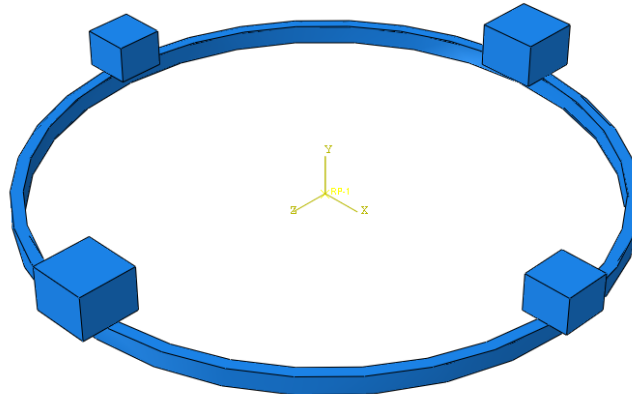
Uložení je řešeno stejným způsobem – pomocí Coupling – ke středovému bodu.



*Obr. 5. Model „solid“ – prstenec pro výpočet MKP*

### 3.4 Model „solid“ – prstenec s kvádry pro výpočet MKP

Tento výpočtový model, uvedený na obr. 6, vychází z reálného uspořádání největších hmot na prstenci. Základem je prstenec z předchozího modelu, k němu jsou připevněny čtyři kvádry o hmotnostech i těžištích odpovídajících příslušným zařízením zavěšeným na prstenci. Namáhání tohoto tělesa je zadáno pouze úhlovou rychlostí. Uložení je stejné jako u předchozího modelu.



*Obr. 6. Model „solid“ – prstenec s kvádry pro výpočet MKP*

## 4. Výpočty

Namáhání prstence bylo zjištěno jak analytickým výpočtem, tak výpočtem pomocí metody konečných prvků. Výsledky výpočtů jsou následně v 5. kapitole porovnány.

### 4.1 Analytický výpočet

K tomuto výpočtu je použit výpočtový model prstence odpovídající zakřivenému prutu, zatíženému čtyřmi silami a spojitým zatížením, viz kapitola 3.1 a obr. 3. Výpočty jsou provedeny ve výpočetním programu MAPLE.

Prstenec je v podstatě kruhový rám, je tedy třikrát staticky neurčitý. Z obr. 3 je vidět, že prut nahrazující rám je v jednom místě rozdělen. Jeden konec je vetknut a druhý zůstane volný. Protože se prut dělí v místě působení síly FR, tato síla se rozdělí na dvě poloviny a na volném konci bude působit pouze jedna polovina této síly. Dále je pro výpočet nutné zavést deformační podmínky. Volný konec má vůči vetknutí nulové posunutí ve směru  $x$  a ve směru  $y$ , dále také nulový úhel natočení. Na volném konci jsou tedy zavedeny dvě vnitřní síly  $NX$  a  $NY$ , každá v příslušném směru, a jedna silová dvojice  $MR$ . Tyto síly a silová dvojice jsou tak velké, aby zachovaly předepsané posuvy a úhel natočení (ty jsou nulové).

Z obr. 3 je patrné rozdělení prutu na čtyři integrační pole. Na těchto polích vyjádřením vnitřních silových účinků získám průběh momentu. Rovnice na jednotlivých polích jsou:

$$M_{II} = -qo * R^2 * (1 - \cos \alpha) - MR - NY * R * (1 - \cos \alpha) - \left(\frac{FR}{2} + NX\right) * R * \sin \alpha \quad (1)$$

$$M_{II} = -qo * R^2 * (1 - \cos \alpha) - MR - NY * R * (1 - \cos \alpha) - \left(\frac{FR}{2} + NX\right) * R * \sin \alpha - FO * R * (-\cos \alpha) \quad (2)$$

$$M_{III} = -qo * R^2 * (1 - \cos \alpha) - MR - NY * R * (1 - \cos \alpha) - \left(\frac{FR}{2} + NX\right) * R * \sin \alpha - FO * R * (-\cos \alpha) \quad (3)$$

$$M_{IV} = -qo * R^2 * (1 - \cos \alpha) - MR - NY * R * (1 - \cos \alpha) - \left(\frac{FR}{2} + NX\right) * R * \sin \alpha - FO * R * (-\cos \alpha) - FO * R * \cos \alpha \quad (4)$$

V těchto rovnicích je  $qo$  spojité zatížení a jeho hodnota se spočte dle vztahu (5), ve kterém vystupuje hmotnost celého prstence  $m_p$  a úhlová rychlost  $\omega$ . Namáhání je počítáno pro rotaci prstence při otáčkách  $60 \text{ min}^{-1}$ , úhlová rychlost má tedy hodnotu  $\omega = 6,2831 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$$qo = \frac{m_p}{2 * \pi} * \omega^2 = \frac{68,2}{2 * \pi} * 6,2831^2 \quad (5)$$

$$qo = 428,51 \text{ N} * \text{mm}^{-1}$$

Nejdříve je třeba vyjádřit deformační podmínky pro volný konec prutu. Pomocí Mohrova integrálu se vyjádří jednotlivé posuvy a úhel natočení. Výrazy pro výpočet uvedených deformací se musí rovnat nule. Pro posuv ve směru osy  $x$  platí výraz (6), ve směru osy  $y$  výraz (7) a pro úhel natočení výraz (8).

$$0 = u = \frac{-1}{E * J} * \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_I * R^2 * \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{II} * R^2 * \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} M_{III} * R^2 * \sin \alpha \, d\alpha + \int_{3\frac{\pi}{2}}^{2\pi} M_{IV} * R^2 * \sin \alpha \, d\alpha \right\} \quad (6)$$

$$0 = v = \frac{1}{E * J} * \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_I * R^2 * (1 - \cos \alpha) \, d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{II} * R^2 * (1 - \cos \alpha) \, d\alpha + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} M_{III} * R^2 * (1 - \cos \alpha) \, d\alpha + \int_{3\frac{\pi}{2}}^{2\pi} M_{IV} * R^2 * (1 - \cos \alpha) \, d\alpha \right\} \quad (7)$$

$$0 = \varphi = \frac{1}{E * J} * \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_I * R \, d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} M_{II} * R \, d\alpha + \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} M_{III} * R \, d\alpha + \int_{3\frac{\pi}{2}}^{2\pi} M_{IV} * R \, d\alpha \right\} \quad (8)$$

Rovnice (6) – (8) tvoří soustavu tří rovnic o třech neznámých, a to  $NX$ ,  $NY$  a  $MR$ . Dosazením známých hodnot získám řešení rovnice, viz výsledky (11) – (13). Poloměr středové čáry profilu prstence je  $R = 1175 \text{ mm}$ , modul pružnosti v tahu  $E = 2,1 * 10^5 \text{ Nmm}^{-2}$ . Kvadratický modul průřezu tenkostěnného obdélníkového profilu o šířce  $B = 50 \text{ mm}$ , výšce  $H = 80 \text{ mm}$  a tloušťce stěny  $t = 5 \text{ mm}$  je  $J = 460\,000 \text{ mm}^4$ . Velikosti odstředivých sil  $FR$  a  $FO$  jsou

vypočteny ze známých hmotností rámu cívky a elektrického rozvaděče. Hmotnost rozvaděče je 50,12 kg a hmotnost rámu cívky je 93,04 kg. Výpočet odstředivých sil je uveden ve vztazích (9) a (10).

$$FR = m_R * R * \omega^2 = 50,12 * 1,175 * 6,2831^2$$

$$FR = 2\,324,93 \text{ N} \quad (9)$$

$$FO = m_O * R * \omega^2 = 93,04 * 1,175 * 6,2831^2$$

$$FO = 4\,315,86 \text{ N} \quad (10)$$

$$NX = -1,947 * 10^{-5} \text{ N} \quad (11)$$

$$NY = -50\,566,09836 \text{ N} \quad (12)$$

$$MR = 51\,819,76583 \text{ N} \quad (13)$$

Dosazením těchto výsledků do vztahů (1) – (4) jsou získány rovnice (14) – (17) popisující průběh ohybového momentu na daných polích. V těchto rovnicích je ohybový moment funkcí pouze úhlu  $\alpha$ .

$$M_I = 2,4837 * 10^6 - 2,5356 * 10^6 * \cos \alpha - 1,3659 * 10^6 * \sin \alpha \quad (14)$$

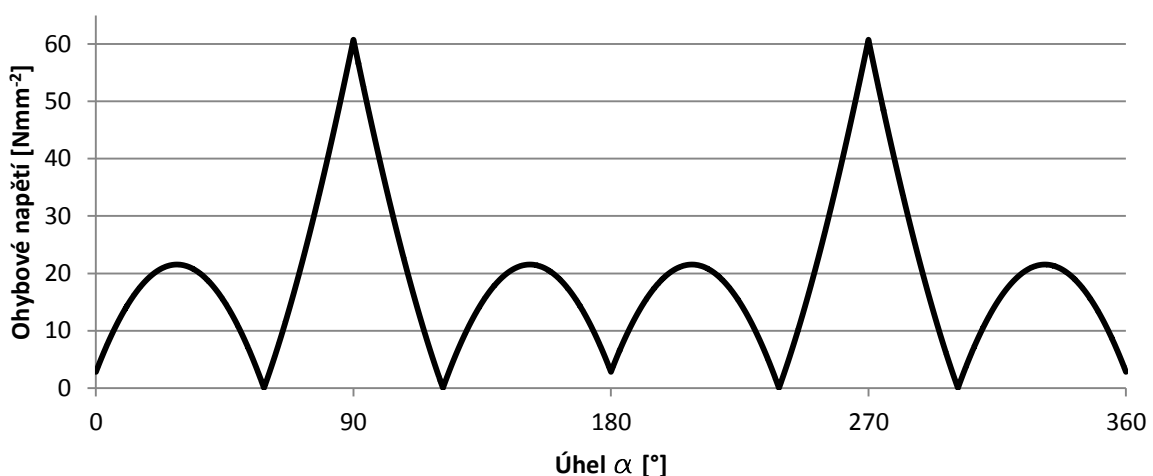
$$M_{II} = 2,4837 * 10^6 + 2,5356 * 10^6 * \cos \alpha - 1,3659 * 10^6 * \sin \alpha \quad (15)$$

$$M_{III} = 2,4837 * 10^6 + 2,5356 * 10^6 * \cos \alpha + 1,3659 * 10^6 * \sin \alpha \quad (16)$$

$$M_{IV} = 2,4837 * 10^6 - 2,5356 * 10^6 * \cos \alpha + 1,3659 * 10^6 * \sin \alpha \quad (17)$$

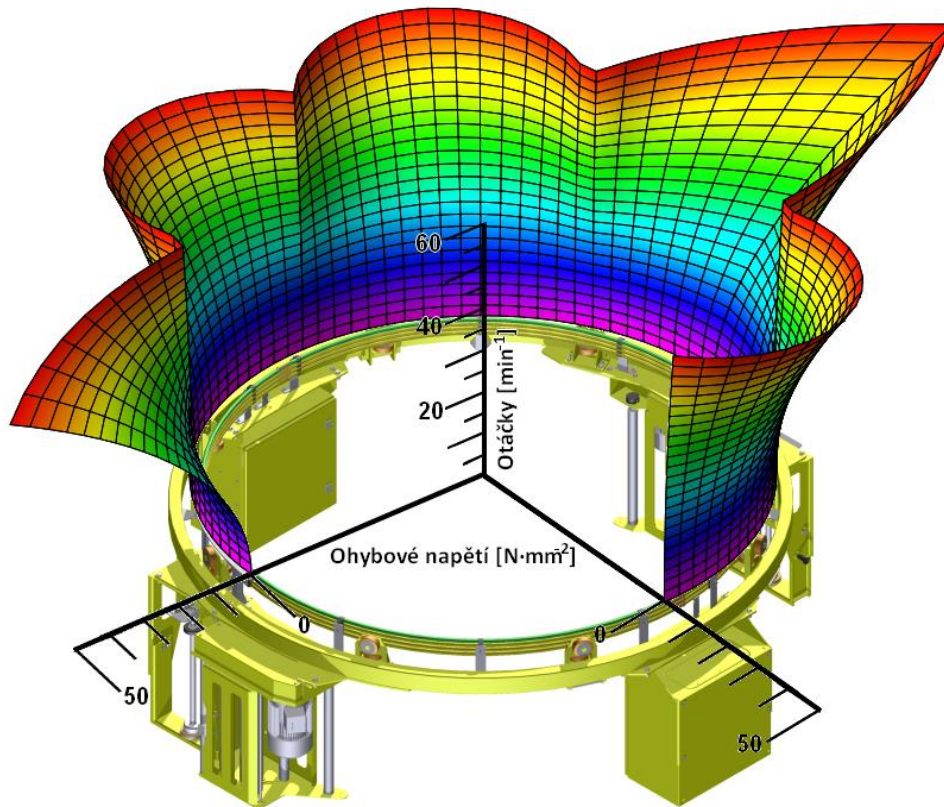
Nyní se může vykreslit průběh ohybového napětí, viz obr. 7. Pro lepší porovnání maximální hodnoty a také pro následné porovnání s výpočty MKP je průběh napětí vykreslen v absolutní hodnotě. Průřezový modul v ohybu daného profilu prstence je  $W_o = 18\,400 \text{ mm}^3$ .

## Průběh ohybového napětí na rotujícím prstenci



Obr. 7. Průběh ohybového napětí na prstenci – analytické řešení

Při vykreslení závislosti velikosti ohybového napětí na otáčkách prstence jsou získány rovnice průběhu ohybového napětí jako funkce dvou proměnných, a to úhlu  $\alpha$  a otáček prstence  $n$ . Tento průběh je zobrazen na obr. 8. Z obrázku je vidět, že nejkritičtějšími místy jsou ta pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$ . To znamená místa upevnění rámců cívek, které jsou těžší nežli elektrické rozvaděče. Navíc napjatost v těchto místech roste mnohem rychleji než v ostatních místech. Maximální hodnota napětí je v místech pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$ , a má hodnotu  $60,75 \text{ Nmm}^{-2}$ . Lokální maxima mají hodnotu  $21,54 \text{ Nmm}^{-2}$ .



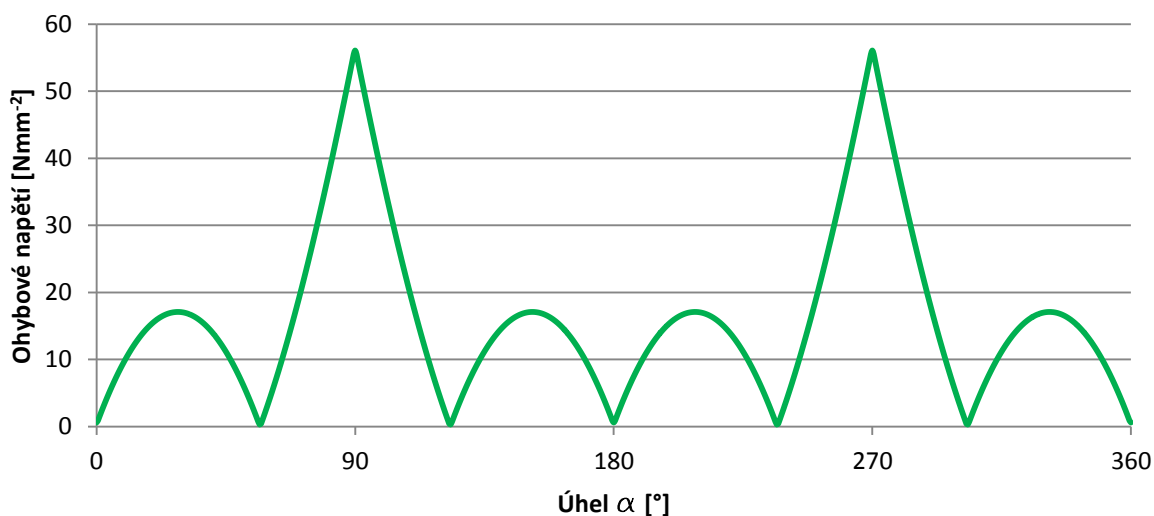
*Obr. 8. Průběh ohybového momentu na prstenci v závislosti na jeho otáčkách*

#### 4.2 Výpočet MKP – model „wire“

Metodou konečných prvků je proveden výpočet drátového modelu z kapitoly 3.2. Velikost elementů je zvolena 10 mm. Na obr. 9 je vykreslen průběh napětí na prstenci. Špičky pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$  dosahují hodnoty  $56 \text{ Nmm}^{-2}$ , maxima oblouků dosahují hodnoty  $17 \text{ Nmm}^{-2}$ .



## Průběh ohybového napětí na rotujícím prstenci

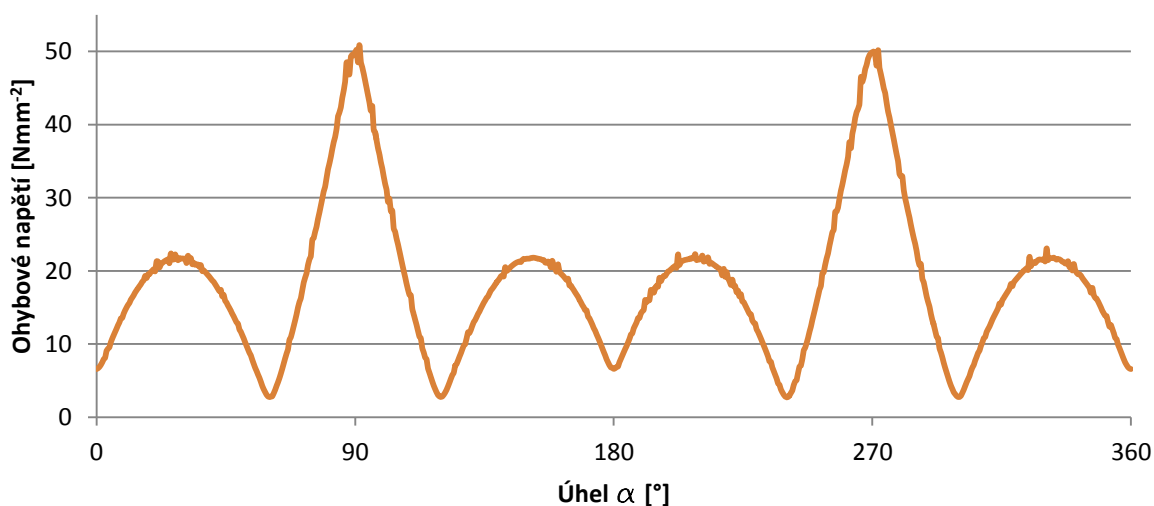


Obr. 9. Průběh ohybového napětí na prstenci – model „wire“

### 4.3 Výpočet MKP – model „solid“ – prstenec

Výpočet je proveden na modelu z kapitoly 3.3, tedy plném tělese shodném s prstencem. K vysítování je použito tetraedrů o velikosti 10 mm. Na obr. 10 je vykreslen průběh ohybového napětí na prstenci. Ve špičkách v místech pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$  je  $50,9 \text{ Nmm}^{-2}$ , lokální maxima pak jsou  $22,4 \text{ Nmm}^{-2}$ .

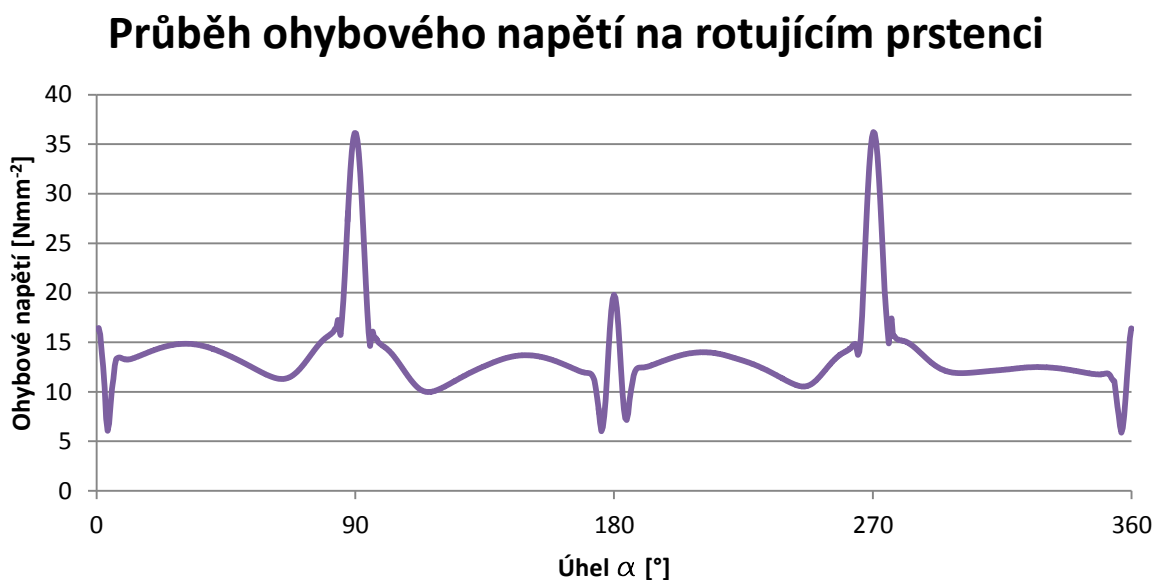
## Průběh ohybového napětí na rotujícím prstenci



Obr. 10. Průběh ohybového napětí na prstenci – model „solid“ – prstenec

#### 4.4 Výpočet MKP – model „solid“ – prstenec s kvádry

K výpočtu je použit výpočtový model z kapitoly 3.4. Na prstenci jsou zavěšeny kvádry o odpovídajících hmotnostech. Síť tohoto tělesa se skládá z hexaedrů, jejichž velikost je 10 mm. Na obr. 11 je zobrazen průběh ohybového napětí, jehož maximální hodnota v místech pod úhly  $\pi/2$  a  $3\pi/2$  je  $36,13 \text{ Nmm}^{-2}$ . V místech pod úhly 0 a  $\pi$  má maximum hodnotu  $16,39 \text{ Nmm}^{-2}$ .



*Obr. 11. Průběh ohybového napětí na prstenci – model „solid“ – prstenec s kvádry*

#### 5. Porovnání výsledků

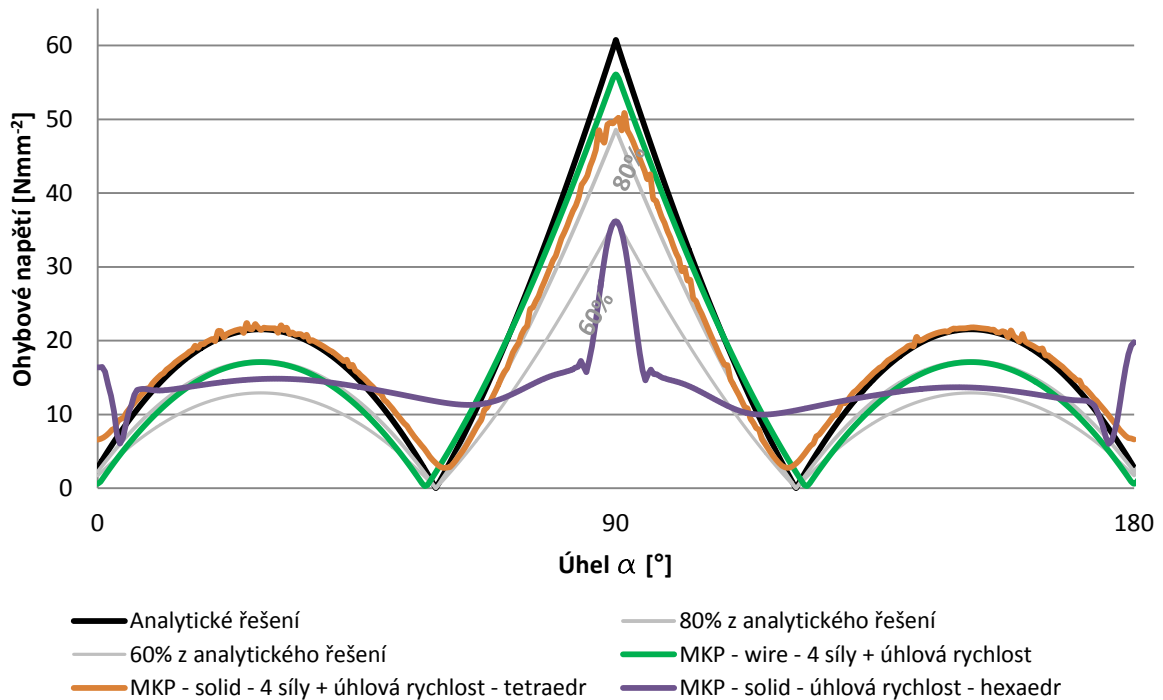
V předchozí kapitole byly pro každý výpočet napsány maximální hodnoty ohybového napětí. V tabulce 1 jsou tyto hodnoty porovnány, jsou zde také procentuálně vyjádřeny odchylky od analytického řešení.

*Tabulka 1. – Porovnání výsledků jednotlivých výpočtů*

	Vypočtené hodnoty		Odchylky	
	Špička [Nmm <sup>-2</sup> ]	Lokální extrém [Nmm <sup>-2</sup> ]	Špička [%]	Lokální extrém [%]
Analytický výpočet	60,75	21,54	0	0
Model „wire“	56	17	7,8	21,1
Model „solid“ – prstenec	50,9	22,4	16,2	4
Model „solid“ – prstenec s kvádry	36,13	16,39	40	23,9

Pro lepší srovnání výsledků jsou na obr. 12 vykresleny průběhy ohybového napětí z jednotlivých výpočtů do jednoho grafu. Průběh ohybového napětí je vykreslen pouze pro jednu polovinu prstence. V grafu jsou navíc vykresleny křivky udávající 80% respektive 60% hodnoty analytického řešení. Tím se nechá průběh napětí zhodnotit lépe, než jak je tomu při porovnávání hodnot pouze v několika bodech (viz tabulka 1).

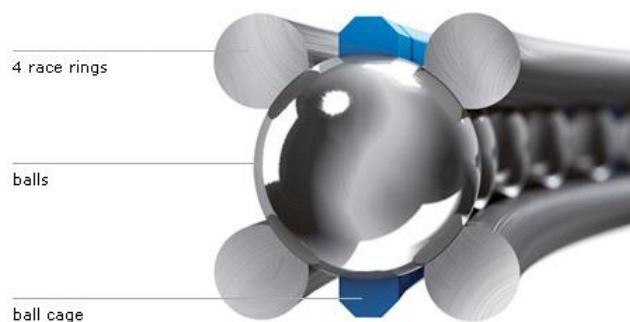
## Průběh ohybového napětí na rotujícím prstenci



*Obr. 12. Porovnání průběhu ohybového napětí na prstenci*

## 6. Návrh ložiska

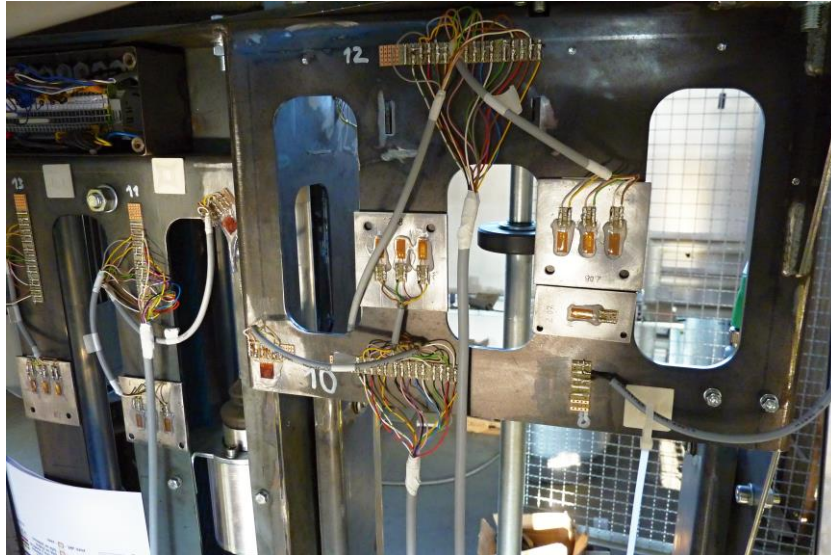
Ke zvýšení tuhosti rotujícího členu by došlo při nahrazení prstence velko-průměrovým valivým ložiskem. Jako nejvhodnější ložisko bylo vybráno ložisko od výrobce Franke sestávající ze čtyř zkroužených drátů a valivých elementů. Ložisko je znázorněno na obr. 13. Výběr vhodného typu ložiska byl konzultován přímo s firmou Franke GmbH. Bylo vybráno ložisko s označením LEZ 2350 7/16. Na obr. 14 je zobrazeno uložení valivého ložiska.



*Obr. 13. Ložisko od výrobce Franke (Zdroj: <http://www.franke-gmbh.de>)*



Vzhledem k velikosti měřeného stroje probíhalo měření přímo v areálu výrobce balicích strojů - firmy Pragometal, spol. s.r.o. Součástí tohoto projektu byla samozřejmě veškerá příprava měření. Z výsledků analýzy MKP byly vytvořeny podklady pro nalepení tenzometrů, byly připraveny části měřicího obvodu (kompenzační tenzometr, pájecí pole, kabely, konektory). Následně byly tenzometry nalepeny na zvolená místa měření. Po této přípravě následovalo vlastní měření, které probíhalo při několika zátěžných cyklech. Na obr. 16 je zobrazen rám cívky, na kterém jsou nalepeny tenzometry a pájecí pole.



*Obr. 16. Rám cívky – tenzometrické měření*

## 8. Závěr

Tento článek popisuje namáhání rotujícího prstence zjištěné různými metodami analytických a MKP výpočtů a jejich porovnání. Pro výpočet metodou konečných prvků bylo použito více výpočtových modelů. Realitě nejvíce odpovídá model prstence se dvěma páry kvádrů o příslušných hmotnostech, které nahrazují rámy cívek a elektrické rozvaděče. V místě uchycení rámu cívek a rozvaděčů je ve skutečnosti zvýšená tuhost, což tento model, na rozdíl od drátového, splňuje. Zmíněný drátový model naopak odpovídá modelu analytickému, který má po celém obvodu konstantní tuhost, proto tento model tolik neodpovídá realitě. Té se více přibližuje výpočet na modelu s kvádry, neboť v místě rámu cívek a rozvaděčů bude vznikat vlivem odstředivé síly špička ohybového napětí. A záleží pak na tuhosti prstence v těchto místech, tedy na tuhosti elektrorozvaděčů a rámu cívek, jak výrazná a jak ostrá špička napětí zde bude vznikat. Z výpočtů bylo zjištěno, že prstenec je nejvíce namáhán v místech uložení rámu cívek a elektrických rozvaděčů.

K porovnání výsledků výpočtů s výsledky tenzometrického měření bude třeba ještě zpracovat naměřená data.

## Poděkování

**Tato práce vznikla s podporou projektu MPO č. FR-TI3/281. Práce a celý výzkum byl podporován firmou Pragometal s.r.o.**

### **Seznam symbolů**

$E$	modul pružnosti v tahu	(N·mm <sup>-2</sup> )
$FO$	odstředivá síla rámu cívky	(N)
$FR$	odstředivá síla elektrického rozvaděče	(N)
$J$	kvadratický modul průřezu	(mm <sup>4</sup> )
$MR$	vnitřní silová dvojice	(N·mm)
$M$	ohybový moment	(N·mm)
$NX$	vnitřní síla ve směru x	(N)
$NY$	vnitřní síla ve směru y	(N)
$R$	průměr prstence	(mm)
$R$	průměr prstence	(mm)
$d\alpha$	diferenciál úhlu	(rad)
$m_o$	hmotnost rámu cívky	(kg)
$m_p$	hmotnost profilu prstence	(kg)
$m_R$	hmotnost elektrického rozvaděče	(kg)
$qo$	spojité zatížení	(N·mm <sup>-1</sup> )
$u$	posuv ve směru osy x	(mm)
$v$	posuv ve směru osy y	(mm)
$\alpha$	úhel	(rad,°)
$\varphi$	úhel natočení	(rad)
$\omega$	úhlová rychlost	(rad·s <sup>-1</sup> )

### **Seznam použité literatury**

DRASTÍK, František a kol. ***Strojnické tabulky pro konstrukci i dílnu.***

Ostrava: Montanex a.s., 1999. ISBN 80-85780-95-X.

FRANKE GMBH. ***General Catalogue*** [online]. Aalen, Germany, 2011 [cit. 2012-06-06].

Dostupné z: <http://www.franke-gmbh.de/en/online-catalogue/index.php>

MICHALEC, Jiří a kol. ***Pružnost a pevnost I.*** Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001.

Fakulta strojní. ISBN 80-01-02359-1.