

**ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE**

FAKULTA STROJNÍ

Ústav mechaniky, biomechaniky a mechatroniky

Odbor pružnosti a pevnosti

**Program pro analýzu napjatosti a
deformaci hřídelů**

Studentská práce

Jan Pecháček

Vedoucí práce: Ing. Karel Vítek, CSc.

Praha 2012

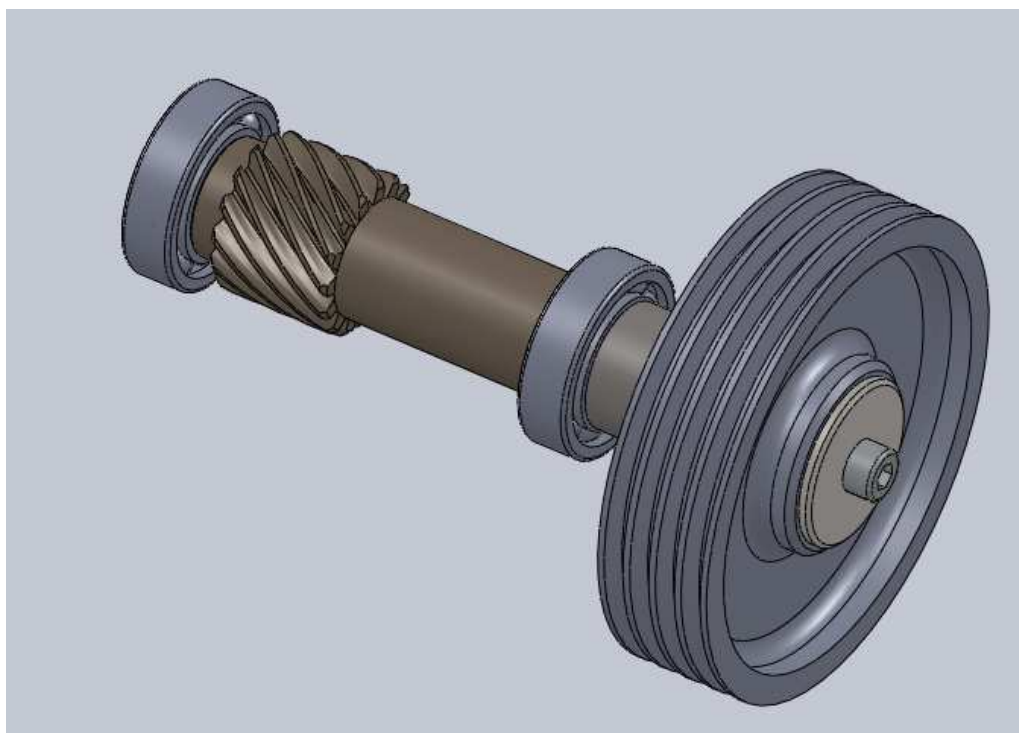
1 Úvod

Studentská práce se zaměřuje na problematiku výpočtu namáhání, deformací a napjatosti konstrukcí hřídelů kruhového průřezu programem vytvořeným v Matlabu. Hlavním cílem je vytvořit program, který by dokázal ze zadaných hodnot vykreslit grafy a vypočítat výsledné hodnoty, aniž by bylo potřeba vymodelovat zadanou hřídel v prostoru. To by bylo velice praktické, jelikož bychom ušetřili čas a práci modelováním zadané hřídele.

V bakalářské práci je popsána teorie výpočtové metodiky přímých prutů, kterými je hřídel modelován.

Pro vytvoření programu jsem si vybral program MATLAB, který se mi zdál nejvhodnější aplikací. Dokáže pracovat v programovacím jazyce, zjednodušuje matematické operace, zejména práci s vektory a maticemi, a především umí vytvářet grafická okna.

Zadání bakalářské práce vychází z předmětu Projekt ALFA, na fakultě strojní ČVUT, ve kterém je zapotřebí zkonstruovat převodovou skříň a navrhnout správné velikosti a tvary hřídelů s ohledem na jejich zatížení a deformace. Oblast použitelnosti programu musí splňovat daná kritéria, kterými jsou staticky určené uložení nosníku s kruhovým průřezem a s prostorovým zatížením, což je u hřídelů obvyklé.



2 Výpočtová metodika nosníku

První část se věnuje teorii potřebné k vytvoření výpočetního programu. Popisuje namáhání a uložení nosníků, kde nosník je namáhaný převážně na ohyb. Zakřivuje se do rovinné či prostorové křivky, podle druhu namáhání. Při namáhání ohybem nedochází ke konstantnímu rozložení napětí v celém průřezu, proto se zavádí průřezové charakteristiky ke stanovení tuhosti průřezu. Pro rozlišení, zda se jedná o prostorový či rovinný ohyb je podstatné, zda v daném místě nosníku je v průřezu nosníku ležící vektor ohybového momentu rovnoběžný s některou z hlavních centrálních os průřezu. Jestliže tomu tak je, jedná se o rovinný ohyb v tomto místě nosníku, ale jestliže není, jedná se zde o prostorový ohyb průřezu nosníku. Zatížení je vyšetřováno pomocí Eulerovy metody řezu. K zjištění vnitřních silových účinků v daném místě je zapotřebí provést řez v tomto místě. Na odříznutou část nosníku působí vnější silové účinky, které samy o sobě nejsou v rovnováze. Rovnováhu v místě řezu zajistí právě vnitřní silové účinky. Při zatěžování ohybovým momentem či posouvající silou vzniká napětí. Toto napětí vzniká především od ohybového momentu. Posouvající síla má malý vliv na napětí, proto budeme posouvající sílu zanedbávat. Po zanedbání posouvajících sil zatěžíme pouze ohybovým momentem. Tento stav se nazývá prostým ohybem. Při tomto prostém ohybu bude zatěžující moment rovnoběžný s hlavní centrální osou průřezu. Při prostém ohybu platí Hookův zákon ve tvaru $\sigma = \varepsilon \cdot E$, kde σ je napětí, ε je deformace, E je modul pružnosti. Deformací nosníku rozumíme změnu jeho tvaru. Nosník mění tvar v důsledku působení [síly](#). Silové působení mění vzájemné [polohy atomů](#), ze kterých se těleso skládá. Toto působení v určitém místě na nosníku popíšeme dvěma složkami, natočením a průhybem. U složitěji zatíženého nosníku využijeme úplnou diferenciální rovnice průhybové čáry, především u spojitého zatížení. Úplná diferenciální rovnice vychází jako kombinace diferenciální rovnice průhybové čáry se Schwedlerovou větou. Pro výpočet natočení či průhybu v daném bodě využijeme Mohrův integrál. Vychází z Castigliánovy věty vyjadřující derivaci deformační energie U podle silového účinku F (osamělá síla nebo moment). Ve vyjádření je $m(x)$ funkce vnitřního momentu od zatížení prutu jednotkovým vektorem. Jednotkový vektor je jednotková síla pro posuv nebo jednotkový moment pro natočení. Obecně posuv je určen v místě a ve směru daného jednotkového vektoru. Rovinný ohyb lze převést na ohyb prostorový. Jelikož síly a momenty jsou vektory, lze vektorovým sečtením dvou kolmých rovin dostat výsledný prostorový průběh ohybu. Tyto kolmé roviny umístíme do hlavních rovin průřezu a do těchto rovin rozložíme všechny vnější silové účinky. Prostorový ohyb je tedy výsledkem dvou

složených rovinných ohybů. Krut kruhového průřezu je vyvolán kroutícím momentem nebo dvojicí sil zatěžující nosník v rovině kolmé na osu nosníku. Při kroucení nosníku se místa, která jsou zatěžována kroutícím momentem, vůči sobě navzájem pootočí. Vzdálenost mezi rovinami řezu zůstává stejná, dochází ke smyku. Smykové napětí vzniká od zatížení nosníku kroutícím momentem. Napětí v tahu nebo tlaku vzniká od osových sil. Ohybové napětí vzniká od celkového ohybového momentu. Tyto složky vytváří kombinované napětí, které vyšetříme pomocí Mohrovy kružnice. Z Mohrovy kružnice odečteme výsledná hlavní napětí a pomocí vhodné pevnostní hypotézy vypočteme výsledné redukované napětí.

3 Výpočetní program v MATLABU

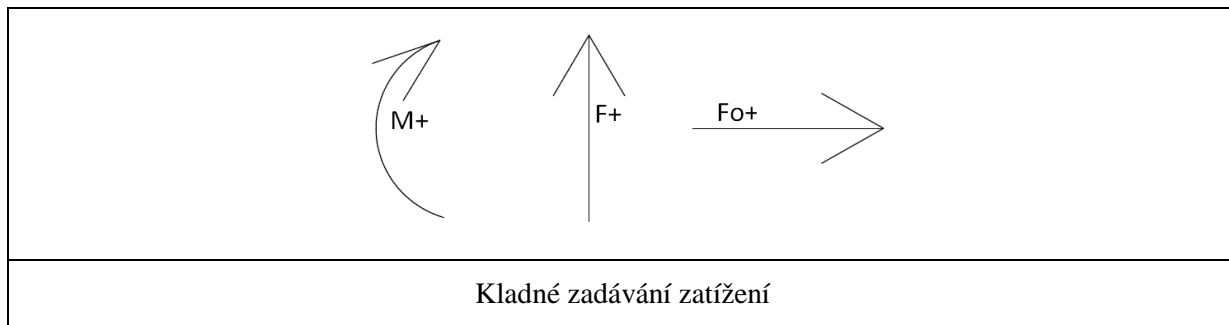
Matlab je vhodný nástroj pro řešení technických výpočtů a grafických aplikací. Název je složen ze dvou slov Matrix Laboratory (maticová laboratoř), základním datovým typem tedy jsou matice nebo vektory. Program je především uzpůsobený pro operace s vektory a maticemi. V Matlabu lze využívat matematické funkce, jako jsou goniometrické funkce, exponenciály, logaritmy či matematické operace. Funguje zde i programovací jazyk. Použité proměnné uvnitř skriptu se ukládají do vnitřní paměti. Výsledky se dají zobrazit pomocí grafických oken.

Vytvořený výpočetní program

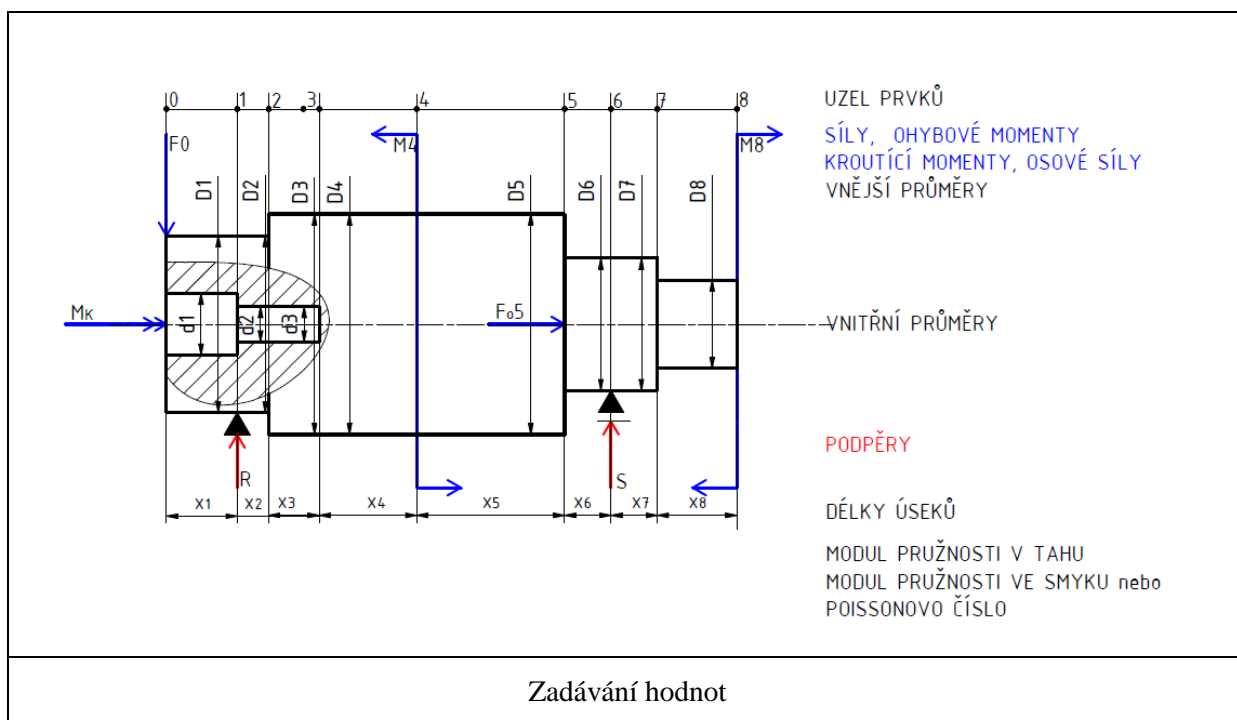
Samotný program je použitelný jen pro některé případy uložení a zatížení. Uložení musí být jen staticky určité se dvěma kloubovými podpěrami. Zatížení může být jak rovinné, tak i prostorové, ale nesmí se zde objevit spojitě zatížení.

3.1 Zadávání hodnot

Po spuštění programu se musí zadat vstupní hodnoty. Nosník je potřeba rozdělit na několik částí. Tyto části budou rozděleny pomocí uzlů prvků. Uzly prvků jsou body v místech, kde se mění zatížení, vnější a vnitřní průměr a podpěry. Při zadávání hodnot musíme dodržovat jejich vzestupné řazení od počátku. V programu je pro správný výpočet důležitý směr zadávání sil a momentů. Kladná orientace smyslů zadávání sil je zobrazena na obrázku, u zadávání kroutících momentů je kladný směr dán pravidlem pravé ruky.

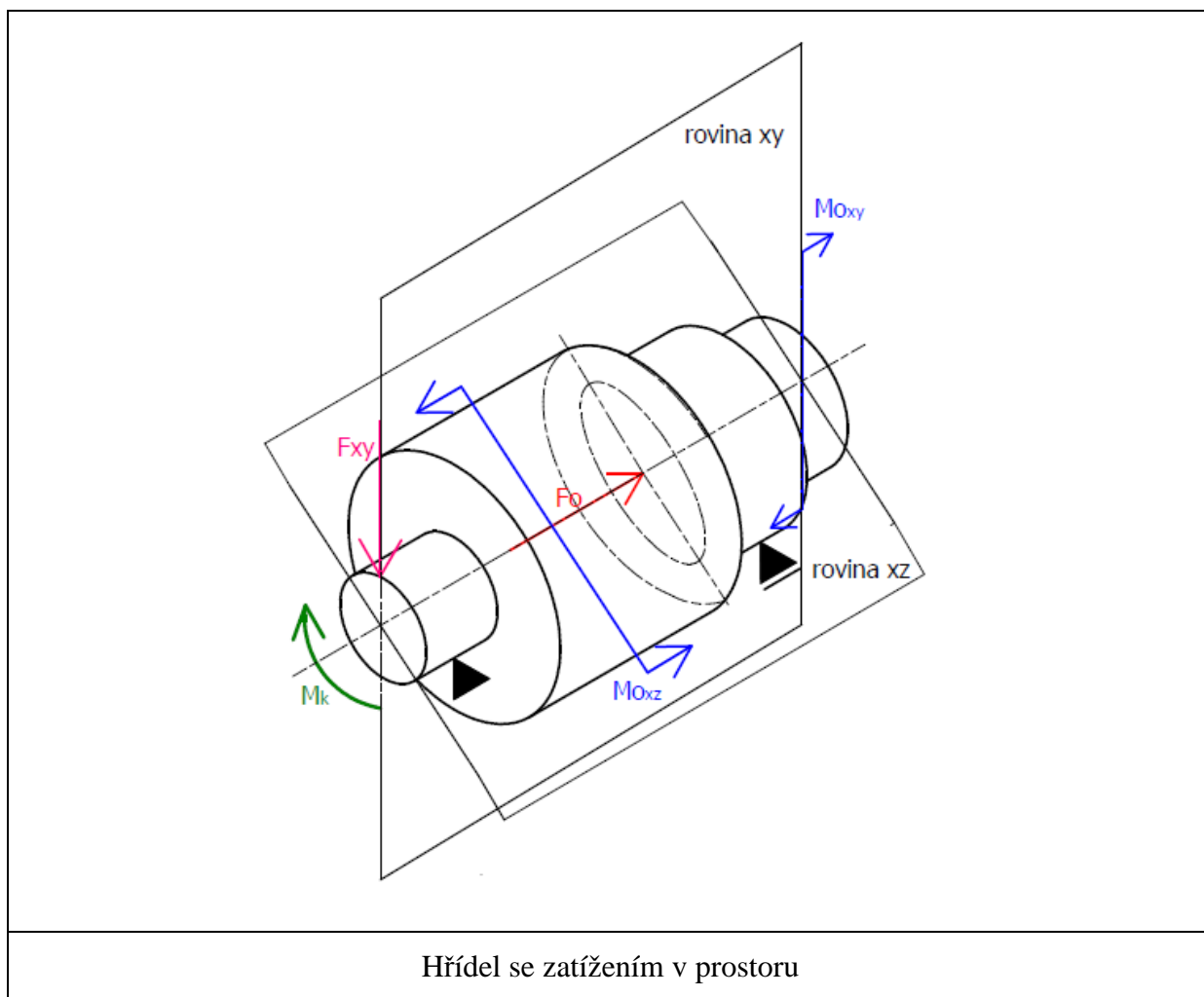
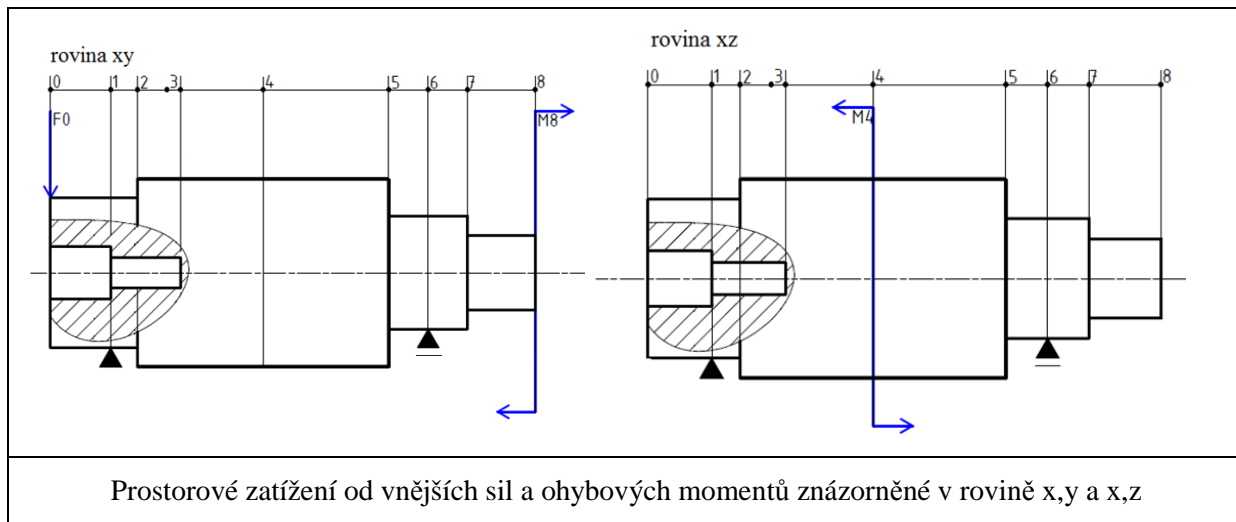


První vstupní hodnotou je počet uzlů prvků. Uzly prvků napočítáme od počátečního nulového prvku. Podle uzlů prvků si rozdělíme nosník. Druhou vstupní hodnotou jsou délky úseků rozděleného nosníku v mm. Třetí vstupní hodnotou jsou vnější průměry daných úseků v mm. Čtvrtou vstupní hodnotou jsou vnitřní průměry daných úseků v mm. Pátou vstupní hodnotou jsou moduly pružnosti v tahu daných úseků v MPa. Šestou vstupní hodnotou jsou moduly pružnosti ve smyku v MPa. Sedmou vstupní hodnotou je umístění podpěr na nosníku. Podpěry jsou vždy na některém z uzlů prvků, proto se zde zadává číslo uzlu prvku.



Osmou vstupní hodnotou jsou osové síly. Devátou vstupní hodnotou jsou kroutící momenty. Při zadávání zatížení ohybovým momentem a vnějšími silami si musíme uvědomit, že zatížení je prostorové a proto musíme toto zatížení rozložit do dvou na sebe kolmých rovin. V první rovině x,y je zadána desátá vstupní hodnota, kterou je zatížení silou v N a jedenáctou vstupní hodnotou je zatížení momentem v Nmm. Ve druhé rovině x,z je zadána dvanáctá vstupní

hodnota a tou je zatížení silou v N. Třináctou vstupní hodnotou je zatížení momentem v Nmm. Pro zjednodušení je zadávání hodnot zobrazeno graficky na obrázcích.



3.2 Výsledné hodnoty a výsledné grafy

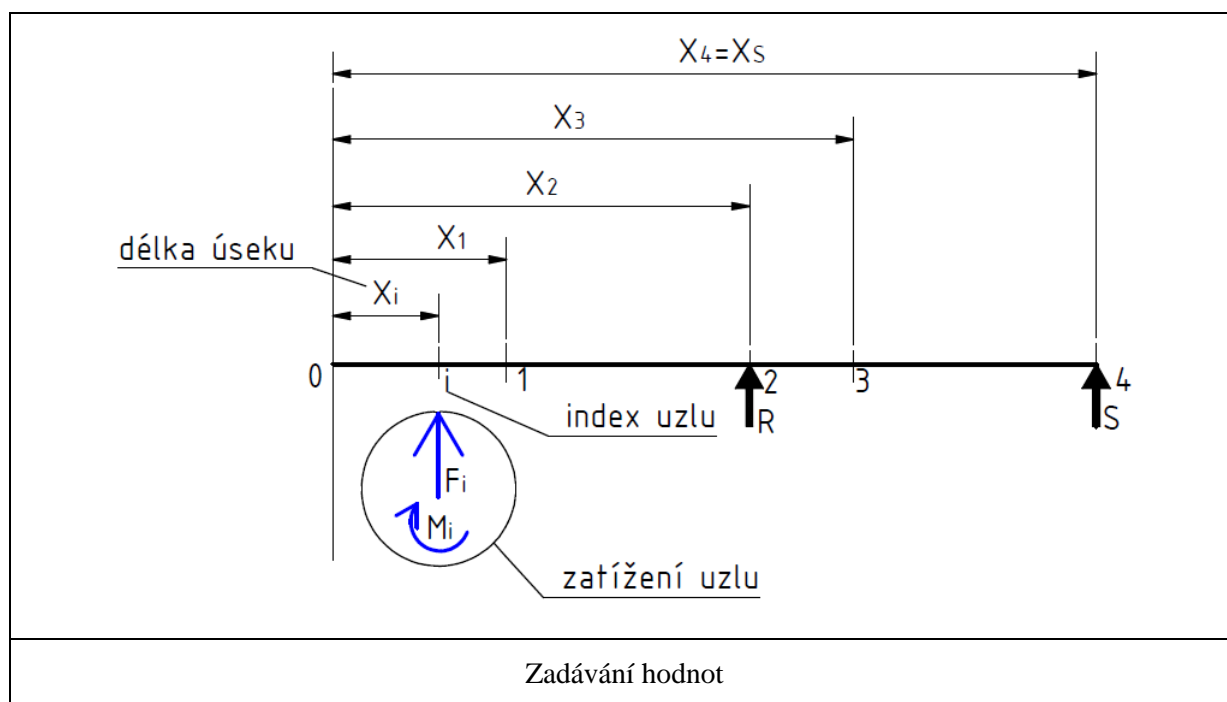
Po zadání veškerých hodnot se v Matlabu v okně Command Window zobrazí výsledné hodnoty reakcí, osových sil, kroutících momentů, zkrutu, redukovaného napětí, posouvajících sil, momentů, průhybů a natočení v rovinách xy, xz a výsledné hodnoty v prostoru. Poté se otevřou grafická okna, která vykreslí průběhy zatížení a deformací z výsledných hodnot. Vykreslené hodnoty jsou v grafech v každé rovině znázorněny stejnou barvou. V rovině xy jsou křivky znázorněny modrou barvou. Rovina xz má křivky znázorněny červeně a v prostoru jsou křivky znázorněny zeleně. Délka nosníku je zobrazena černou barvou. V místech podpěr jsou podpěry značeny kroužkem fialové barvy a popsány písmenem R a S. V okně Command Window se vypíše výsledná data. Pokud bychom chtěli některá data potlačit, je potřeba ve struktuře programu zapsat za výsledný vektor středník. Výsledek je možné zobrazit v několika formátech. Tyto formáty je možné změnit na začátku struktury programu. Formát rat zobrazí výsledek ve zlomcích. Formát short zobrazí výsledek na čtyři desetinná místa (př.: -163,1256). Formát long zobrazí šestnáctiferný výsledek (př.: -163,1255555555555556). Formát short e zobrazí výsledek na čtyři desetinná místa ve formě e^{xx} (př.: $-1,631 \cdot e^{+002}$). Formát long e zobrazí šestnáctiferný výsledek ve formě e^{xx} (př.: $-1,6312555555555556 \cdot e^{+002}$).

3.3 Struktura programu

Pro strukturu programu je důležité stanovit si daný postup výpočtů zatížení a deformací nosníku. Výpočet ohybových momentů a posouvajících sil bude vycházet z metody řezu nosníkem. Průhyb a natočení nosníku stanovíme pomocí Mohrova integrálu. Je potřeba převést tyto metody výpočtu do určitého matematického zápisu vhodného k zápisu do programovacího jazyka.

Pro potřeby výpočtu se zavede pole rozdělené na n-částí o délce úseku x, daných počtem uzlů prvků. Jednotlivé výsledné uzlové body je třeba vyšetřit a pro jejich rozeznání je nutné je značit indexem. K výpočtu výsledné hodnoty i-tého prvku je zapotřebí zavést vnitřní indexování a k, přičemž vnitřní index j slouží k výpočtu ohybového momentu a index k slouží pro výpočet jednotkového momentu.

Zadávání hodnot sil a momentů je dáno pravotočivým souřadným systémem. Tedy kladný směr síly směřuje nahoru, kladný ohybový moment točí doprava. Zatížení umístíme do uzlových bodů. Reakce musí mít shodný kladný směr jako síly, jelikož v programu lze určit jediný kladný směr. Umístění reakcí v podpěrách musí být zadané a reakce R, S mají tedy známé délky úseků od počátku x_R a x_S . Výpočty zatížení a deformací dostaneme pomocí postupného vyšetřování uzlových bodů, které mají danou vzdálenost x od počátku.



Výsledné reakce stanovíme z momentových rovnic. Reakci v místě první podpěry dostaneme jako sumu ohybových momentů k druhé podpěře. Výsledný ohybový moment poté vydělíme vzdáleností obou podpěr. U výpočtu reakcí je M_j vektor zadaných ohybových momentů v jednotlivých uzlových bodech, F_j je vektor zadaných silových působení v uzlových bodech, x_j je vektor vzdáleností od počátku k jednotlivým uzlovým bodům.

$$R = \frac{\sum_{j=1}^n (M_j + F_j [x_S - x_j])}{x_S - x_R} \quad (3.3a)$$

$$S = \frac{\sum_{j=1}^n (M_j + F_j [x_R - x_j])}{x_R - x_S} \quad (3.3b)$$

Výpočet ohybového momentu v uzlovém bodě je součtem momentů k tomuto bodu. V rovnici je M_i vektor vypočtených momentů v uzlových bodech, x_i je vektor vzdálenosti od počátku k uzlovému bodu a P_j je vektor reakcí R a S s nulami.

$$M_i = \sum_{j=1}^i (M_j + F_j(x_i - x_j) + P_j(x_i - x_j)) \quad (3.3 c)$$

Výpočet reakce způsobené jednotkovým zatížením je sumou momentu způsobeného jednotkovou silou v místě zjišťovaného průhybu a poté vydělené vzdáleností obou podpěr. V rovnici je f_k vektor jednotkové síly s nulami, x_k je vektor vzdáleností od počátku k uzlovému bodu.

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (f_k [x_s - x_k])}{x_s - x_r} \quad (3.3 d)$$

$$s = \frac{\sum_{k=1}^n (f_k [x_r - x_k])}{x_r - x_s} \quad (3.3 e)$$

Předchozí vzorce výpočtu reakcí průhybu je možné zjednodušit. Není nutné zavádět vektor jednotkové síly, stačí znát uzlový bod, který zatěhuje jednotková síla "1" a tím pádem znát i vzdálenost x_k od počátku. Tento výpočet není použitý v programu.

$$r = \frac{"1" \cdot (x_s - x_k)}{x_s - x_r} \quad (3.3 f)$$

$$s = \frac{"1" \cdot (x_r - x_k)}{x_r - x_s} \quad (3.3 g)$$

Reakce od zatěžujícího jednotkového momentu "1" v místě zjišťovaného natočení hřídele.

$$r = \frac{"1"}{x_s - x_r} \quad (3.3 h)$$

$$s = \frac{"1"}{x_r - x_s} \quad (3.3 i)$$

Výsledný vektor jednotkových momentů m_i potřebný k zjištění průhybů dostaneme jako sumu momentů od jednotkové síly f_k a reakcí p_k způsobených jednotkovým zatížením.

$$m_i = \sum_{k=1}^i (f_k(x_i - x_k) + p_k(x_i - x_k)) \quad (3.3 j)$$

Výsledný vektor jednotkových momentů m_i potřebný ke zjištění natočení dostaneme jako sumu momentů od jednotkového momentu $m_k''''1''$ a reakcí p_k způsobených jednotkovým momentem.

$$m_i = \sum_{k=1}^i (m_k''''1'' + p_k(x_i - x_k)) \quad (3.3k)$$

Výpočet průhybu a natočení vychází z Mohrova integrálu.

$$v_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{M_i \cdot m_i}{E_i \cdot J_{oi}} dx \quad (3.3l)$$

$$\varphi_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{M_i \cdot m_i}{E_i \cdot J_{oi}} dx \quad (3.3m)$$

Z předchozích vzorců (3.3c) a (3.31) vychází vzorec součinu ohybových momentů M_i a momentů od jednotkového zatížení m_i pro výpočet průhybu.

$$M_i \cdot m_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \{ [M_j + F_j(x_i - x_j) + P_j(x_i - x_j)] \cdot [f_k(x_i - x_k) + p_k(x_i - x_k)] \} \quad (3.3n)$$

Z předchozích vzorců (3.3c) a (3.3k) vychází vzorec součinu ohybových momentů M_i a momentů od jednotkového momentu m_i pro výpočet natočení.

$$M_i \cdot m_i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \{ [M_j + F_j(x_i - x_j) + P_j(x_i - x_j)] \cdot [m_k''''1'' + p_k(x_i - x_k)] \} \quad (3.3o)$$

Po roznásobení vzorce(3.3n) zintegrujeme a dosadíme integrační meze. Dostaneme tak výsledný integrál a po dosazení modulu pružnosti E a kvadratického momentu J vypočítáme průhyb.

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} M_i \cdot m_i \cdot dx =$$

$$= \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left\{ M_j \cdot f_k \left(\frac{x^2}{2} - x_k \cdot x \right) + F_j \cdot f_k \left(\frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j x_k \cdot x \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +P_j \cdot f_k \left(\frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j x_k \cdot x \right) + M_j \cdot p_k \left(\frac{x^2}{2} - x_k \cdot x \right) + \\
& +F_j \cdot p_k \left(\frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j \cdot x_k \cdot x \right) + P_j \cdot p_k \left. \frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j \cdot x_k \cdot x \right\}_{x_i}^{x_{i+1}}
\end{aligned} \tag{3.3p}$$

Po roznásobení vzorce (3.3o) zintegrujeme a dosadíme integrační meze. Dostaneme tak výsledný integrál a po dosazení modulu pružnosti E a kvadratického momentu J vypočítáme natočení.

$$\begin{aligned}
& \int_{x_i}^{x_{i+1}} M_i \cdot m_i \cdot dx = \\
& = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left\{ M_j \cdot m_k'''' \cdot x + F_j \cdot m_k'''' \left(\frac{x^2}{2} - x_j \cdot x \right) + P_j \cdot m_k'''' \left(\frac{x^2}{2} - x_j \cdot x \right) + \right. \\
& + M_j \cdot p_k \left(\frac{x^2}{2} - x_k \cdot x \right) + F_j \cdot p_k \left(\frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j \cdot x_k \cdot x \right) + \\
& \left. + P_j \cdot p_k \left(\frac{x^3}{3} - x_j \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} x_k + x_j \cdot x_k \cdot x \right) \right\}_{x_i}^{x_{i+1}}
\end{aligned} \tag{3.3r}$$

Výpočet reakce způsobené osovými silami.

$$N = - \sum_{j=1} F_{0j} \tag{3.3s}$$

Výpočet zkrutu na jednotlivých polích nosníku.

$$\varphi_{j+1} = \frac{(\sum_{k=1}^j M_k) \cdot (x_{j+1} - x_j)}{G \cdot J_p} \tag{3.3t}$$

Výpočet zkrutu od počátečního bodu.

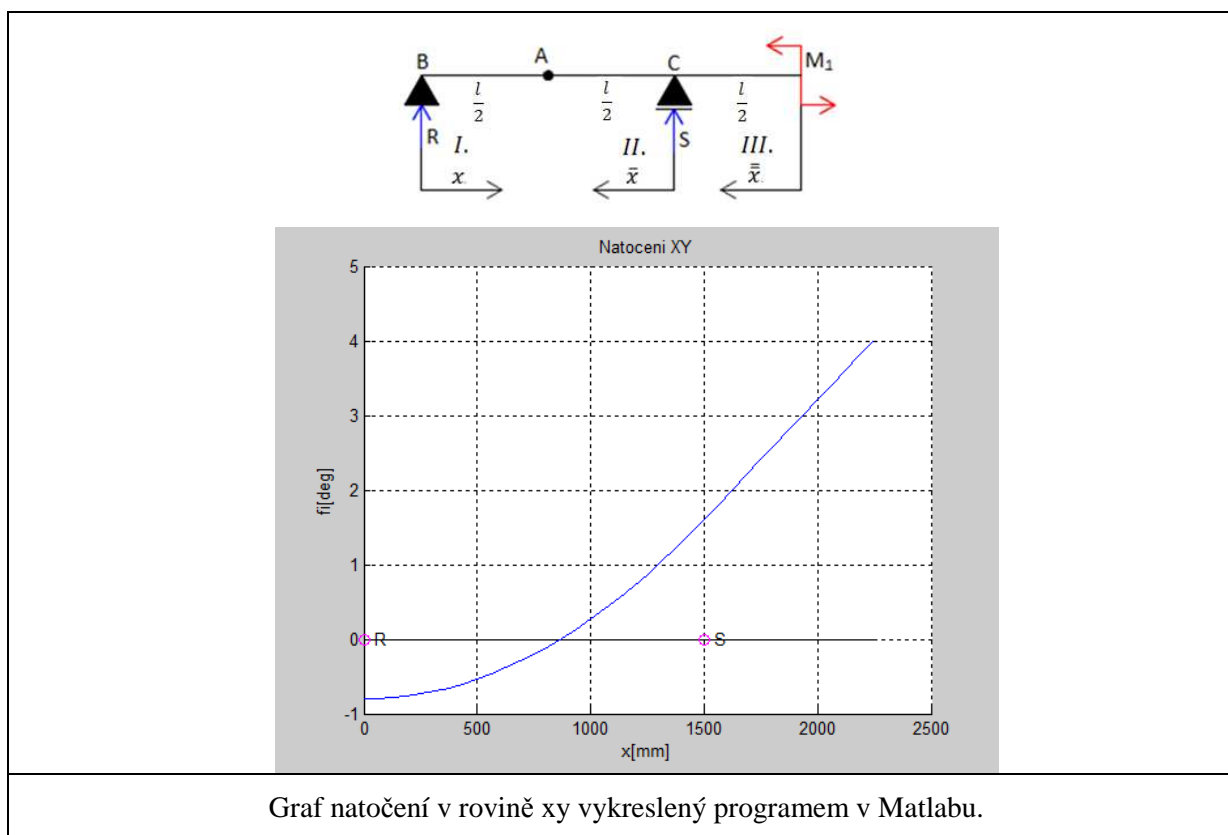
$$\varphi_i = \sum_{j=1}^i \varphi_j \quad (3.3u)$$

4 Analýza variant konstrukcí hřídelů

Výsledné hodnoty je třeba ověřit pomocí vhodných výpočetních metod a u složitějších konstrukcí hřídelů ověřit správnost výsledků pomocí běžně používaných výpočetních programů. Porovnám společné výsledky a vyvodím z nich objektivní závěry. Po ověření funkčnosti programu provedu celkovou analýzu zatížení hřídele.

4.1 Ověření funkčnosti navrženého programu

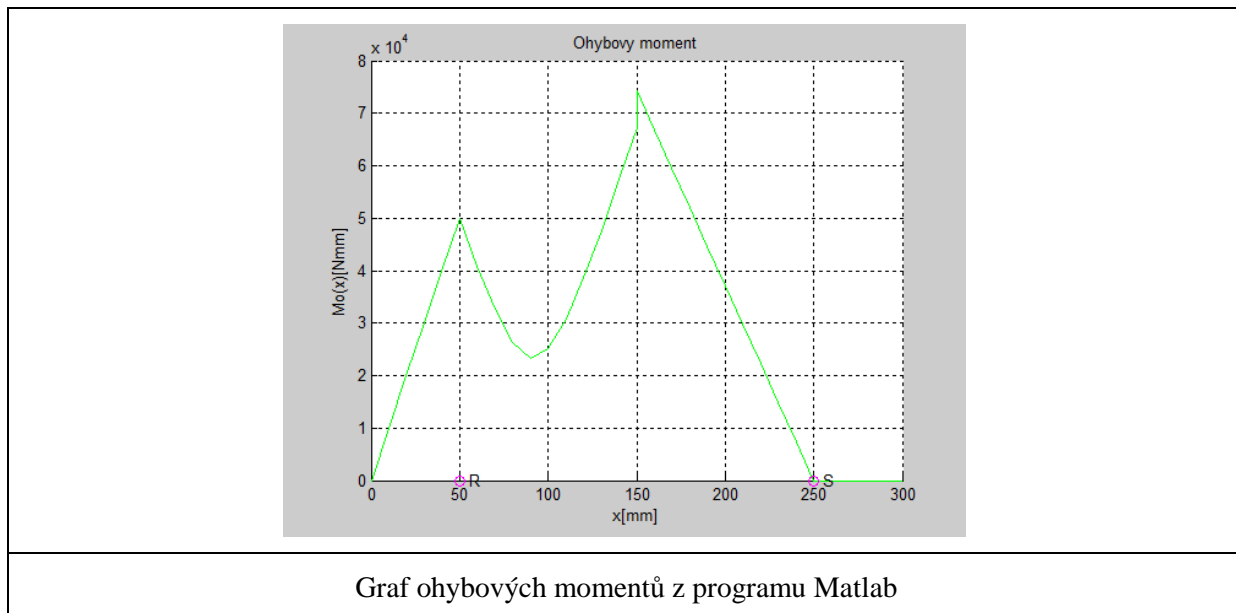
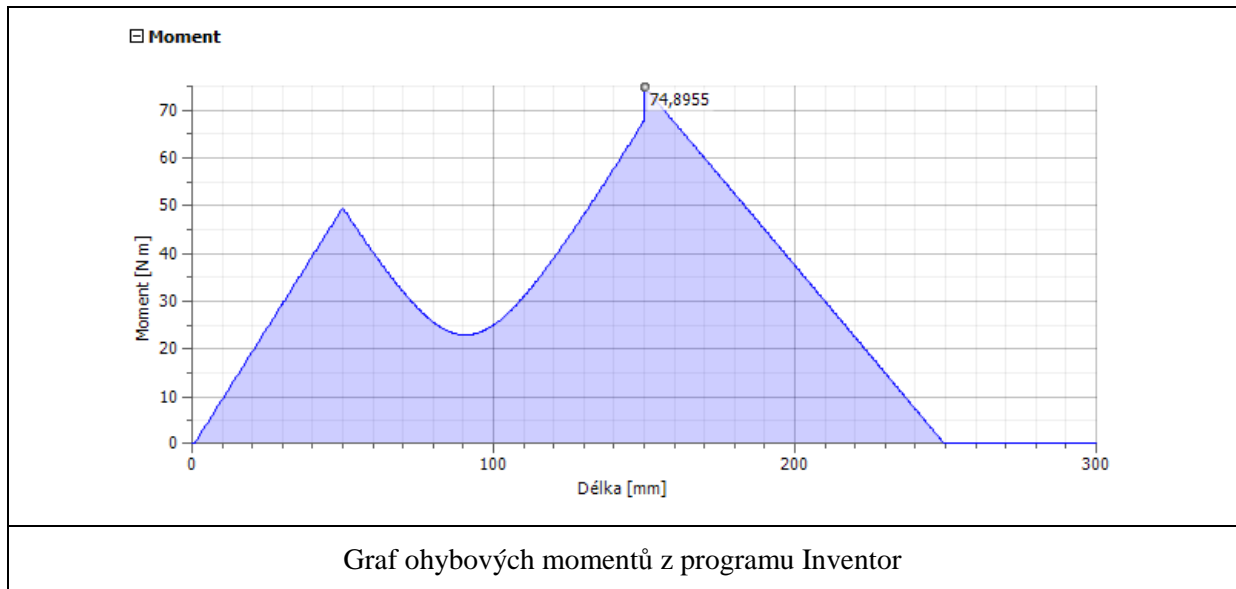
Správnost výpočtů je nejprve potřeba ověřit pomocí jednoduchého příkladu, ve kterém jsem spočítal zatížení a deformace na nosníku.



Z vypočtených hodnot jsem zjistil, že pro jednoduché výpočty je program funkční.

4.2 Porovnání výstupních dat s Inventorem

Složitěji prostorově zatížený hřídel s proměnným průřezem nám poslouží k lepší kontrole vykreslovaných grafů vytvořených programem v Matlabu. Tyto grafy porovnáme s vykreslenými grafy pomocí programu Inventor a vyhodnotíme správnou funkčnost vykreslování zatížení.



Na obrázcích je znázorněno jedno z výsledných porovnání grafů. Po porovnání všech výsledků je zřejmé, že program je použitelný i pro složitější výpočty.

4.3 Možný rozvoj a optimalizace programu

Při vývoji programu jsem se setkal s některými úskalími, především u Mohrova integrálu pro výpočet průhybu a natočení. Pro lepší vykreslení grafů bylo nutné zavést možnost spuštění automatického děliče polí. Nosník potom musí být děličem rozdělen na více částí. Tím se násobně zvětšuje množství výpočtů s každým přidaným uzlovým bodem. Vykreslené grafy dokonale neodpovídají skutečnému průběhu deformací u složitějších nosníků s větším počtem polí, jelikož se musí snížit počet polí rozdělených děličem z důvodů náročnosti výpočtových operací u méně výkonných počítačů. Ve výpočtu by se dal zjednodušit Mohrov integrál tím, že by se sloučil vektor sil a vektor reakcí, a u průhybu bychom sloučili vektor jednotkové síly a jednotkové reakce. Výpočet reakcí při jednotkovém zatížení u výpočtu průhybu lze také zjednodušit tím, že právě na vyšetřovaném uzlu bychom nemuseli vytvářet vektor jednotkového zatížení. To by vyžadovalo zcelení celého cyklu pro výpočet jednotkového momentu. Takto zjednodušený výpočet umožňuje zvýšení počtu rozšířených uzlových bodů i u složitějšího nosníku s více polí a tím pádem dokonalejší vykreslení grafů. Budoucí rozvoj programu by mohl také zahrnovat výpočet staticky neurčitěho nosníku nebo nosníku zatíženého spojitým zatížením. Program dokáže vypočítat vetknutí, kdy umístíme podpěry těsně za sebe a mezi těmito podpěrami zvětšíme nejméně dvojnásobně průměr nosníku, abychom zvýšili jeho tuhost. Potom bude jeho natočení a průhyb mezi podpěrami minimální.

5 Závěr

Cílem práce bylo vytvořit program v Matlabu, který by byl schopen zanalyzovat typické staticky určité uložené hřídele zatížené prostorovými silovými účinky. Analýza hřídelů odladěným programem zahrnuje výpočet silových zatížení, napjatosti a deformací. Program vytvořený v Matlabu dokáže vypočítat a graficky znázornit namáhání, napjatost a deformace hřídele. Funkce navrženého programu jsou úspěšně ověřeny porovnáním s výpočty MKP v programu Inventor. Z výsledné analýzy realizované programem je možné usoudit, zda-li je hřídel vhodně navržen. Vytvořený program může být používán také při výuce na naší fakultě, například v předmětu Projekt.