

Numerická simulace proudění okolo válce za použití metody LES (Large eddy simulation)

Bc. Zdeněk Sumara

Vedoucí práce: Ing. Pavol Vitkovič

Abstrakt

Práce je zaměřena na simulaci turbulentního proudění za válcem pomocí metody LES. Jsou popsány dosavadní poznatky z oblasti turbulentního proudění. Dále popis použité numerické metody a testování numerické metody na simulaci proudění nekonečně širokým kanálem, jelikož výsledky mohly být porovnány s přímou simulací. Stěžejní část práce řeší simulaci proudění okolo válce při různých Reynoldsových číslech.

Klíčová slova

proudění okolo válce, turbulentní proudění, large eddy simulation.

1. Úvod

Tímto příspěvkem bych chtěl představit část mé diplomové práce, která se zabývá problémem proudění okolo válce. I přesto, že se jedná o problém, kterým se věda zabývá již desítky let, je stále co objevovat. Turbulentní proudění je stále velkou neznámou dneška. I když jsme se o tomto problému mnohé naučili, stále jsme od plného porozumění turbulence daleko. Vývoj a fáze turbulentního proudění jsou velmi dobře pozorovatelné právě na obtékání válce. K získávání dat, díky kterým získáváme bližší představu o mechanismech a fyzice turbulence, jsou používány dvě elementární metody. V první řadě se jedná o experiment a s rostoucím výkonem výpočetní techniky je to také počítačová simulace proudění. Nejlepší metodou simulace je samozřejmě přímá simulace – DNS (*direct numerical simulation*). Vedle toho existuje výpočetně méně náročná a také vhodná metoda LES (*large eddy simulation*) a tuto metodu také použiji ve své diplomové práci.

V tomto příspěvku se však ještě nevěnuji přímo problematice obtékání válce, ale věnuji ho popisu zvolené metody, výpočetního algoritmu a testovací úloze, kterým je problém proudění kanálem. Tato úloha byla jednou z prvních problémů simulovaných přímou simulací, a až do dnešního dne byla provedena nespočetněkrát. Jedná se tak o vynikající úlohu pro ověření výpočetní metody.

2. Použité numerické metody

Základní numerickou metodou použitou pro řešení Navier-Stokesových rovnic pro nestlačitelné ale také stlačitelné proudění je metoda konečných objemů. Ta se používá pro řešení těchto parciálních diferenciálních rovnic především z jednoho hlavního důvodu a to možnost, anebo spíše vlastnost této metody splnit rovnici kontinuity.

Při použití této numerické metody pro řešení Navier-Stokesových rovnic a vlastně i jiných metod jako

jsou metody konečných prvků nebo konečných derivací vystupuje několik problémů.

Prvním problémem je nelineární konvektivní člen, ten se v Navier-Stokesových rovnicích vyskytuje, protože jsou v Eulerově tvaru, což je popis sledování rychlostního pole. Je znám Lagrangeův popis a Eulerův popis. Přičemž Lagrangeův popis zkoumá a sleduje vždy jednu a tu samou částici. Při Eulerově metodě je sledována stále stejná oblast, jehož poloha se s časem nemění. Při převedení Lagrangeova typu Navier-Stokesových rovnic na Eulerův typ, který je pro simulaci zjevně výhodnější, vzniká nelineární konvektivní člen. Tato nelinearita je řešena ve výpočetním algoritmu iteračními postupy.

Druhým a vážnějším problémem je rozlišení sítě, čili množství použitých buněk. Rozlišení sítě je závislé na Kolmogorově měřítku, toto měřítko říká, jaká jsou nejmenší měřítka, která musejí být zohledněna. Pro korektní simulaci by musela být zohledněna nejmenší měřítka, přičemž roste rozlišení sítě do neakceptovatelné výše. Malá měřítka mají velký vliv na velká měřítka, jelikož v nich dochází k největší disipaci energie, při jejich zanedbání by výsledky simulace neměly se skutečností mnoho společného.

V jednoduchých případech proudění, jako je například už zmiňovaný případ proudění kanálem, lze simulovat i nejmenší měřítka, taková simulace se nazývá DNS (*direct numerical simulation*), při složitějších nebo dokonce technických problémech není tento přístup vzhledem k dnešním limitům výpočetní techniky možný. Proto byla vyvinuta metoda RANS (*Reynolds average Navier Stokes*), při použití tohoto přístupu se nejedná o simulaci nýbrž o model proudění. Tento přístup není přímo exaktní, protože základní rovnice RANS tvoří systém uzavřených rovnic. Z tohoto důvodu musí být systém rovnic uzavřen rovnicemi plynoucími z fyzikálních modelů. Tento přístup se dnes nejvíce používá při praktických výpočtech, problémem modelování je ztráta většiny informací o proudění včetně např. časové informace.

Kompromisem mezi DNS a RANS přístupem k modelování respektive simulaci proudění je právě metoda LES (*large eddy simulation*), v této metodě jsou velká měřítka přímo simulována a malá měřítka, jsou modelována. Modelování malých měřítek by nemělo příliš zkreslit výsledek výpočtu, protože je předpokládána jejich nezávislost na okrajových podmínkách.

2.1 Metoda konečných objemů

Oblast, na které probíhá simulace, je rozdělena na konečný počet konečných objemů, na kterých jsou parciální diferenciální rovnice diskretizovány. V tomto případě se jedná o Navier-Stokesovy rovnice respektive o jejich upravený tvar, který je závislý na použité metodě řešení – DNS, LES nebo RANS. Tuto metodu demonstrováme na jednoduché transportní rovnici pro skalární veličinu ϕ . [1] [4]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (U \phi) - \nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi) = S_{\phi}(\phi) \quad (1)$$

Pro zjednodušení příkladu je uvažován stacionární děj a celá rovnice je integrována přes objem.

$$\int_V \nabla \cdot (U \phi) dV - \int_V \nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi) dV = \int_V S_{\phi}(\phi) dV \quad (2)$$

Integrály přes objem, které obsahují operátor nabra, jsou převedeny dle Gaussovy věty na integrály přes plochu.

$$\int_S U \phi \vec{n} dS - \int_S \Gamma_\phi \nabla \phi \vec{n} dS = \int_V S_\phi(\phi) dV \quad (3)$$

V následujícím kroku je provedena diskretizace rovnice (3) přes obecný konečný objem.

$$\sum_f (U \phi)_f S - \sum_f (\Gamma_\phi \nabla \phi)_f S = S_c V + S_p \phi \quad (4)$$

Zdrojový člen je vyjádřen obecně, jelikož může být jakýkoliv, obecně je funkcí ϕ a tak i jiných veličin. Zbývá nahradit derivace v difúzním členu rovnice, respektive gradient skalární veličiny na stěně, což se běžně dělá následující jednoduchou diskretizací.

$$(\Gamma_\phi \nabla \phi)_f S = \frac{\Phi_N - \Phi_P}{|d|} |S| \quad (5)$$

Příčemž proměnné ϕ_N a ϕ_P jsou průměrné hodnoty veličin ϕ v sousedních buňkách a d je vzdálenost středů buněk.

Při výpočtu za pomoci metody konečných objemů se musí interpolovat hodnota ze středu buňky na její stěny, tak aby mohla být provedena numerická integrace.

K čemuž se používají dvě základní schémata – lineární schéma a schéma UPWIND.

Lineární schéma je vlastně prostá lineární interpolace, má přesnost druhého řádu, což je výhoda. Velkou nevýhodou je však nestabilita, která se může vyskytovat při Reynoldsových číslech větších než 2. Proto musí být použita dostatečně jemná síť, což je při větších rychlostech těžko dosažitelné kritérium.

Schéma UPWIND interpoluje na stěnu buňky celou hodnotu ze středu buňky a podle vektoru rychlosti respektive dle skalárního součinu vektoru rychlosti a vektoru plochy stěny buňky, je na stěnu interpolována hodnota z “levé” či “pravé” buňky. Toto schéma dosahuje přesnosti prvního řádu, ale jeho větší nevýhodou je velká umělá difuzivita. Proto není vůbec vhodné pro přímou simulaci nebo simulaci za použití metody LES, jelikož v turbulentním proudění převládá konvektivní člen nad difúzním.

Při simulaci metodou LES se kombinují výhody obou schémat tak, aby mohla být použita síť s menším rozlišením a zároveň docházelo k co nejmenší umělé difuzivitě.

2.2 Algoritmus PISO

Pro výpočet proudění kanálem byl použit software OpenFOAM, který bude použit i pro následný výpočet obtékání válce. V programu OpenFOAM je pro nestacionární výpočty implementován algoritmus PISO. Tento algoritmus propojuje zákon zachování hmoty – rovnice kontinuity se zákonem zachování hybnosti – Navier-Stokesovy rovnice.[1] [4]

$$\nabla U = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \nabla U - \nabla \cdot \nu \nabla U = -\nabla p \quad (7)$$

Po diskretizaci proměnné U v těchto dvou základních parciálních diferenciálních rovnicích vzniká soustava lineárních rovnic.

$$M \cdot U = -\nabla p \quad (8)$$

Člen na pravé straně respektive matice M je rozdělena na diagonální složku a vektor H

$$M \cdot U = A \cdot U - H \quad (9)$$

Po dosazení zpět do rovnice (8) vzniká.

$$A \cdot U - H = -\nabla p \quad (10)$$

Z rovnice (10) vyjádříme proměnnou U a tak je získána rovnice pro korekci rychlosti.

$$U = A^{-1} \cdot H - A^{-1} \nabla p \quad (11)$$

Rovnice pro korekce tlaku je získána aplikací rovnice kontinuity na rovnici (11)

$$\nabla \cdot (A^{-1} \nabla p) = \nabla \cdot (A^{-1} \cdot H) \quad (12)$$

V prvním kroku je počítána soustava lineárních rovnic popsaných rovnicí (8), ta je počítána s počátečním odhadem gradientu tlaku a rychlosti U .

Z tohoto výpočtu jsou inicializovány proměnné A a H .

Může být provedena korekce rychlosti dle rovnice (11).

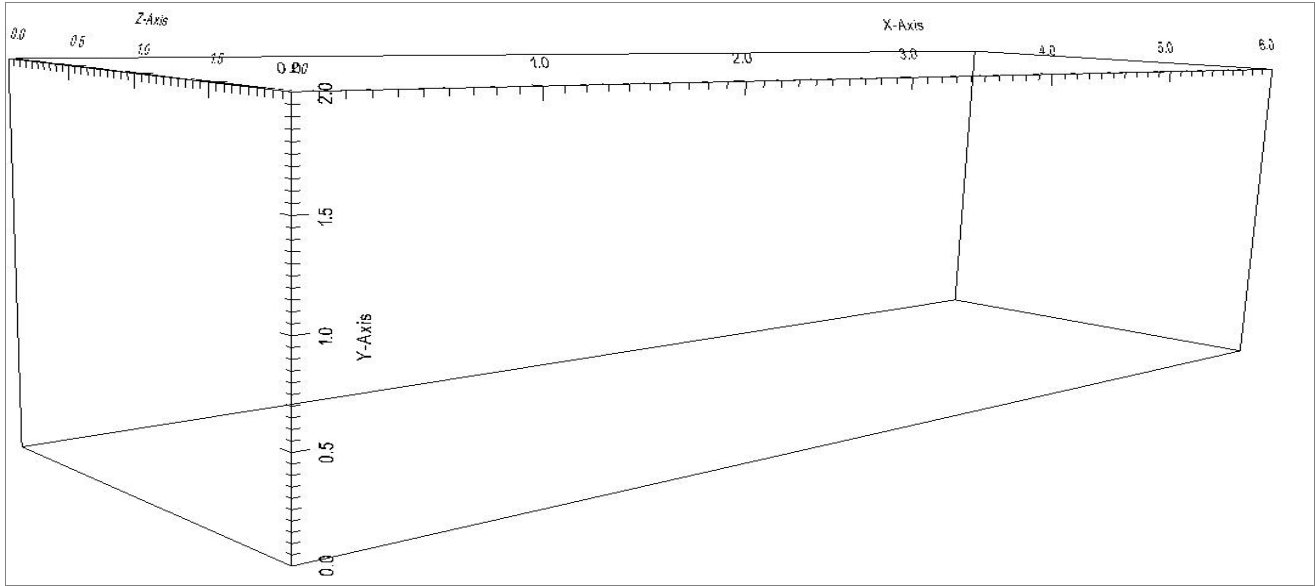
Následuje výpočet korekce tlaku dle rovnice (12).

Nakonec se ještě jednou provede korekce rychlosti rovnice (11) a jsou přepočítány okrajové podmínky.

3. Výpočet proudění kanálem

Jako testovací úloha pro LES metodu implementovanou v softwaru OpenFOAM byl zvolen výpočet proudění kanálem, z důvodů objasněných výše. Byl počítán nekonečně široký kanál, jelikož tak nemusí být aplikováno zjemnění sítě na bočních stěnách kanálu, periodická okrajová podmínka byla aplikována také na vstupu a výstupu z kanálu.

Rozměry výpočetní oblasti:	2x2x6 [m]
Střední rychlost v kanálu:	U=0.066 [m/s]
Reynoldsovo číslo:	Re=3 300
Viskozita:	$\nu=2e-5$ [m ² /s]



Obrázek 1: Geometrie výpočetní oblasti

3.3 Základní rovnice

Metoda LES je popsána v mnoha fundovaných aplikacích, proto teď jenom krátce k použitým základním rovnicím a aplikovanému modelu.[2]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \nabla \cdot U = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \nu \nabla U - B$$

(13)

Rychlost vystupující v rovnici (13) je filtrovaná rychlost a poslední člen je modelované napětí – *SGS stress (subgrid scale stress)*, čímž se modeluje vliv malých měřítek.

Přičemž v nejjednodušších modelech se tento tenzor napětí vyjadřuje následovně.

$$B = \frac{2}{3} \cdot K + \nu_k \left(\nabla U^T + \nabla U - \frac{1}{3} \text{tr}(\nabla U + \nabla U^T) \right)$$

(14)

Aby byla soustava parciálních diferenciálních rovnic uzavřená, je potřeba dopočítat neznámou turbulentní kinetickou energii K a neznámou turbulentní viskozitu ν_k . Jeden z nejstarších a nejznámějších modelů je Smagorinskyho model, který počítá turbulentní viskozitu a turbulentní kinetickou energii z algebraických rovnic. Dobře jsou metoda LES a nejdůležitější modely popsány v článku Furebyho, Gosmana, Tabora, Wellera [2].

Pro tuto simulaci byl zvolen jednorovnicový model, popsáný rovněž v článku uvedeném výše. Tento model počítá turbulentní kinetickou energii z transportní rovnice, turbulentní viskozita je počítána z algebraického vztahu.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla(kU) = -B \cdot \frac{1}{2} (\nabla U + \nabla U^T) + \nabla(\nu_k \nabla k) - \epsilon$$

(15)

$$v_k = c_k \Delta k^{\frac{1}{2}}$$

(16)

Druhý člen na pravé straně rovnice představuje difuzivitu a třetí člen disipaci energie, ta může být vyjádřena následovně.

$$\epsilon = c_\epsilon k^{\frac{3}{2}} \Delta^{-1}$$

(17)

Delta v rovnicích (16) a (17) označuje filter, který určuje modelovaná měřítka v programu OpenFOAM jsou měřítka defaultně filtrována velikostí sítě respektive velikostí konečných objemů.

Pro proudění kolem pevných hranic, jako jsou např. stěny kanálu, je potřeba do algebraického členu přidat tlumící funkci, jelikož v mezní vrstvě narůstá reálná viskozita, proto musí být turbulentní viskozita tlumena. To je prováděno tzv. tlumícími funkcemi. Pro tento výpočet byla zvolena van Driestova tlumící funkce, která u pevných hranic snižuje turbulentní viskozitu a disipaci turbulentní energii.

3.2 Okrajové podmínky

Před začátkem výpočtu musí být nastaveny okrajové podmínky pro základní veličiny, což je tlak a rychlost, a pro veličiny, které jsou modelovány, což je kinematická turbulentní energie a okrajové podmínky musí být určeny i pro turbulentní viskozitu.

Okrajové podmínky pro rychlost – U

Na vstupu je periodická podmínka neboli *cyclic*, což znamená, že na vstup jsou dosazovány hodnoty z výstupu, ta stejná podmínka tak samozřejmě platí pro výstup.

Stejná podmínka – *cyclic* je aplikována na boční stěny kanálu, tak je simulován nekonečný kanál nebo přesněji část výseku z kanálu mnohonásobně širšího než je simulovaná oblast.

Na dolní a horní stěně je aplikována podmínka nulové rychlosti – $U=(0 \ 0 \ 0)$, jelikož jsou předpokládány pevné reálné stěny, proto musí být rychlost na stěně nulová.

Okrajové podmínky pro tlak – p

Okrajové podmínky na vstupu, výstupu a na bočních stěnách jsou *cyclic*, ze stejných důvodů jako podmínky pro rychlost.

Na dolní a horní stěně se tlak nemůže měnit, proto jsou na nich použity podmínky nulové derivace ve směru normály ke stěně – *zero Gradient*.

Okrajové podmínky pro kinetickou turbulentní energii – k

Na vstupu, výstupu a bočních stěnách je opět z už objasněných příčin použita podmínka *cyclic*.

Turbulentní kinetická energie na dolní a horní stěně musí být samozřejmě nulová, jiné nastavení by odpovídalo průchodu energie stěnou, což se neděje, proto je turbulentní kinetická energie na stěnách nulová – $k=0$.

Okrajové pro turbulentní viskozitu – nuSgs

Pro turbulentní viskozitu platí stejné okrajové podmínky na vstupu, výstupu a bočních stěnách jako u předchozích veličin – tedy *cyclic*.

Okrajové podmínky na dolní a horní stěně kanálu jsou *zeroGradient*, jelikož tam nedochází ke změně turbulentní viskozity.

3.3 Počáteční podmínky

Složitější problém nastává u počátečních podmínek, už jenom proto, že proudění kanálem není ničím rozrušováno, a ani při vyšších Reynoldsových číslech nepřejde rychle z laminárního proudění do turbulentního. Bez inicializace turbulentního proudění by se tak stalo až velmi dlouhý výpočetní čas díky vzrůstajícím numerickým chybám. Proto se používají různé inicializační techniky. Bohužel nejde do proudění vnášet pouze náhodné poruchy, tyto jsou totiž velmi rychle utlumeny a turbulentní proudění nevzniká. Je potřeba buzení, které má statistický charakter. Toho je možno docílit Fourierovou dekompozicí, tento přístup je však složitý a programátorsky náročný. Mnohem elegantnější způsob inicializace je popsán v článku od Schoppa a Hussaina [3], kteří v něm popisují dynamiku koherentních vírů tvořených u stěn. Tyto nestability popsali jednoduchými rovnicemi pomocí goniometrických funkcí.

$$U^{plus} = U_0^{plus} + \left(\frac{\Delta u_0^{plus}}{2}\right) \cos(\beta^{plus} z^{plus}) (y^{plus}/30) \exp(-\sigma y^{plus2} + 0.5) \quad (18)$$

Rovnice (18) popisuje rychlostní pole v x-ovém směru, přičemž plus nad rychlostí značí, že se jedná o normovanou rychlost, stejně tak veličina y plus značí normovanou vzdálenost od stěny.

Členy Δu_0^{plus} , β^{plus} a σ konstanty, které jsou aproximované podle typického rozložení rychlostního pole u stěny.

Pro tento výpočet byly zvoleny tyto konstanty podle článku Schoppa a Hussaina.

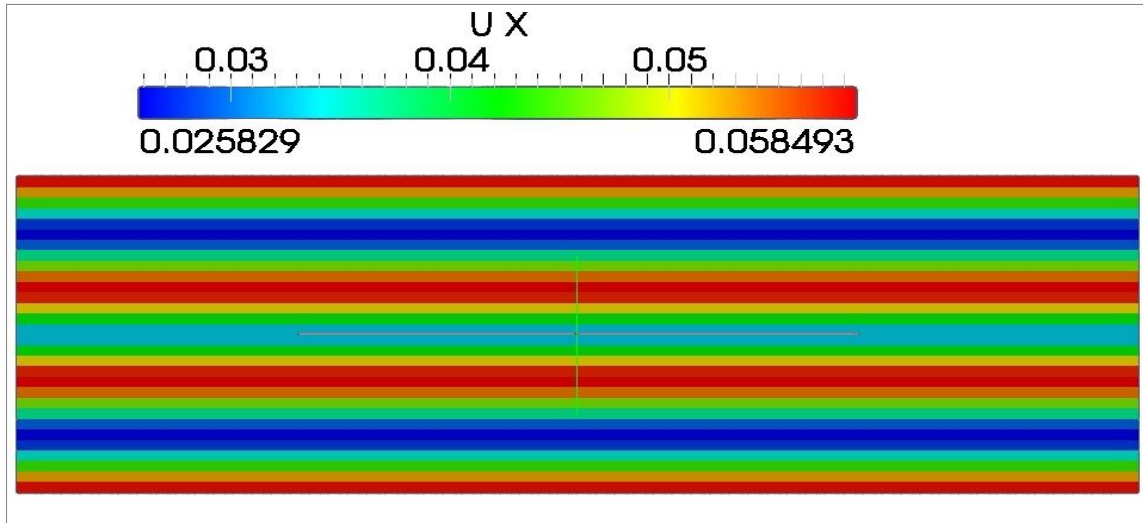
$$w = \epsilon \sin(\alpha^{plus} x^{plus}) y^{plus} \exp(-\sigma y^{plus2}) \quad (19)$$

Rovnice (19) rychlostní pole v z-ovém směru. Přičemž w je složka rychlosti ve směru osy z, x plus a y plus jsou bezrozměrné vzdálenosti a alfa plus je koeficient, který byl ve výpočtu taktéž zvolen dle článku [3].

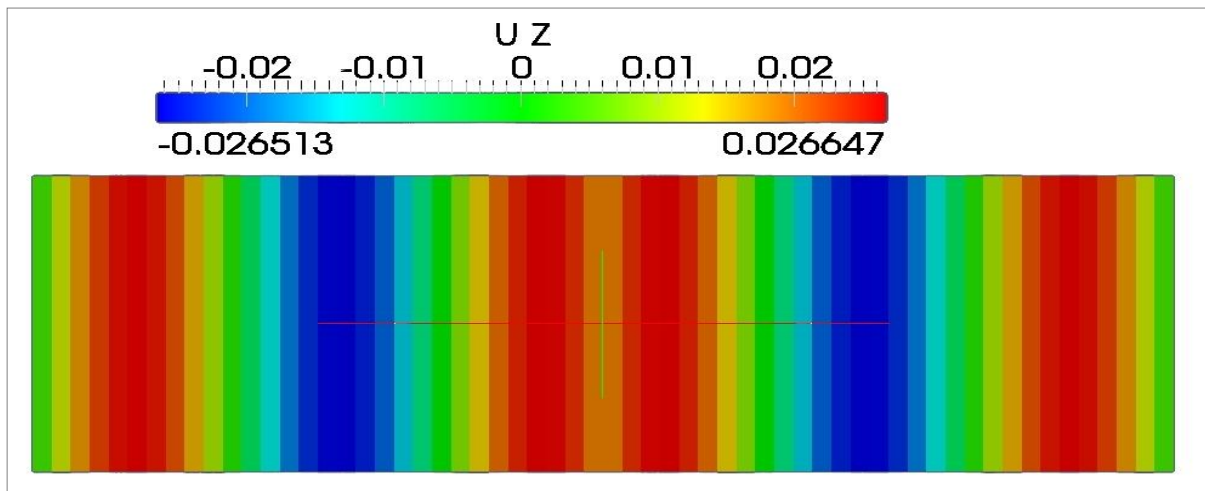
Rovnice (18) a (19) byli implementovány jako utilita do programu OpenFOAM. Nejprve muselo být spočítáno laminární rychlostní pole, které má parabolický průběh a v rovnici (18) je představeno proměnnou U_0^{plus} , představuje tedy vstupní hodnotu. Počáteční parabolické pole bylo vypočítáno

samozejmě s jinými okrajovými podmínkami na vstupu a výstupu.

Rychlostní pole y-ové složky rychlosti a x-ové je znázorněno následujícími obrázky.



Obrázek 2: Počáteční rychlostní pole - x-ová složka



Obrázek 3: Počáteční rychlostní pole - ypsilonová složka rychlosti

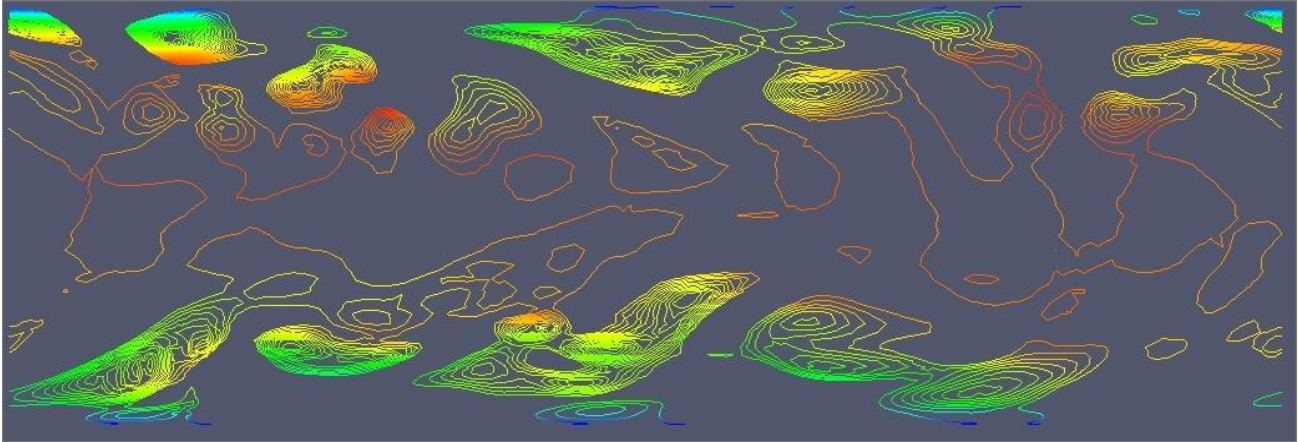
4. Výpočet a vyhodnocení výsledků

Výpočet byl proveden pro několik různých sítí a výsledky průběhů všech třech složek fluktuací a normované rychlosti byly porovnány s daty y přímé simulace, Byly použity data od pánů J. C. del Álamo a J. Jiméz, kteří je publikovali v článku “Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels”, Phys. Fluids Vol. 15 No. 6. pp L41-L44, J. C. del Álamo a J. Jiméz.

Tímto způsobem byla ověřena vhodnost metody LES a vliv rozlišení sítě na výsledku simulace.

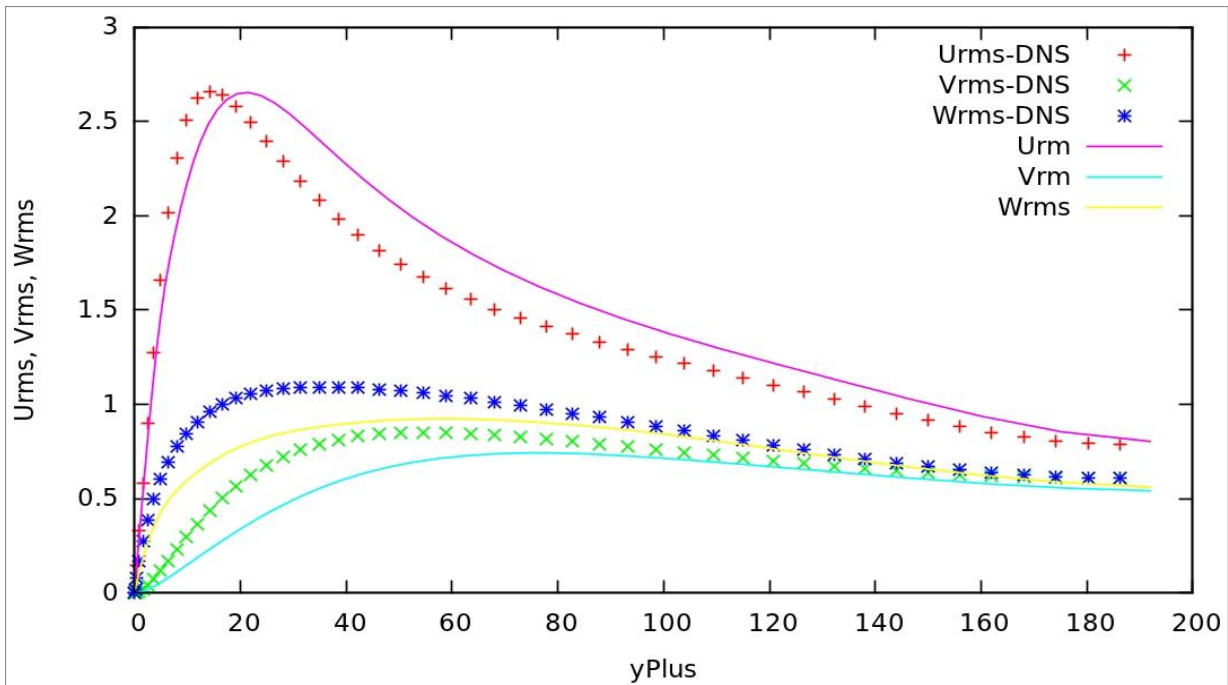
4.1 První výpočet

První výpočet byl proveden na síti o velikosti 180x90x90 buněk, oblast tak byla diskretizována 364 500 buňkami.

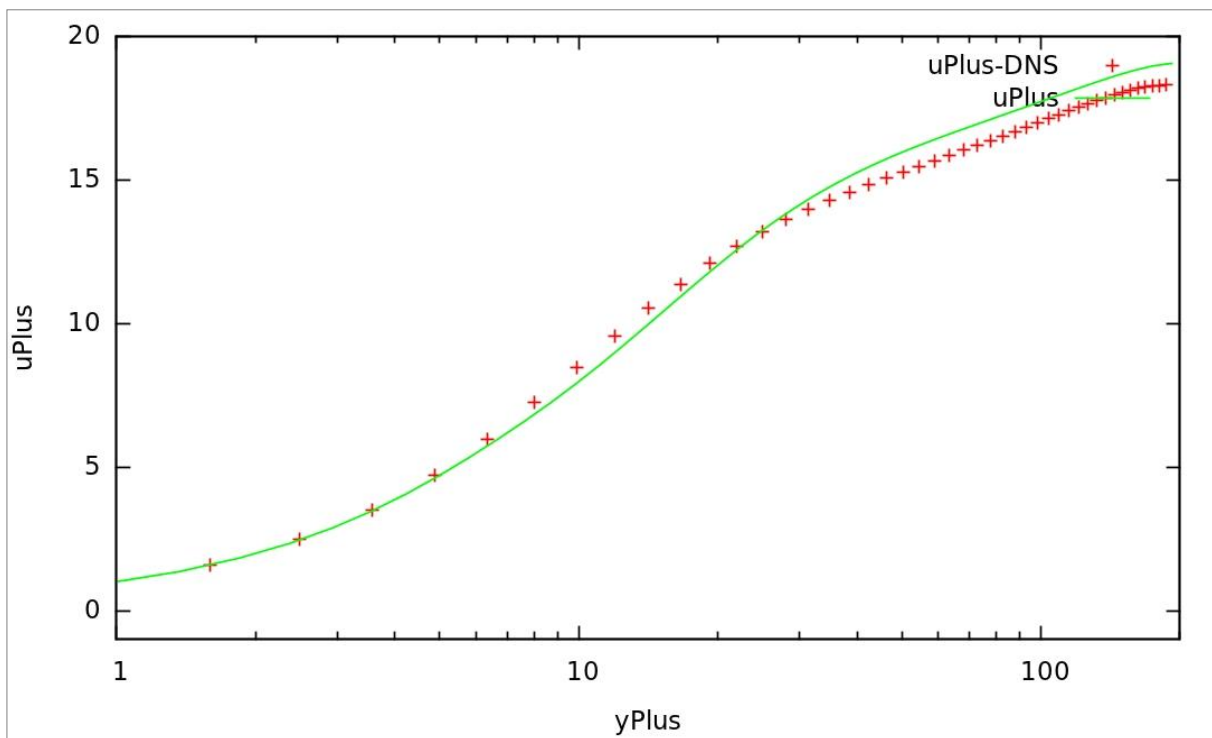


Obrázek 4: Izočáry skalární veličiny Q

Obrázek výše zobrazuje izočáry kladných hodnot skalární veličiny Q v řezu kanálem. Veličina Q nebo také “ Q kritérium” je počítána z rozdílů norem antisymetrické a symetrické části tenzoru gradientů rychlostí, jelikož symetrická část tenzoru gradientu rychlostí vyjadřuje posuv a antisymetrická část vyjadřuje rotaci, tak rozdílem jejich norem získáme veličinu, která přibližně určuje turbulentní oblasti. Z obrázku je patrné, že nejvíce turbulentních oblastí se nachází u stěn, na druhou stranu není uměnění turbulence uprostřed stěn tak drastické, jak to vypadá na tomto obrázku. Dále od stěn jsou totiž turbulentní struktury spíše trojrozměrné a to tento obrázek nemůže zachytit. Při podrobnějším zkoumání celé oblasti ve více časových krocích by se dali rozeznat koherentní struktury u stěn, což není předmětem této práce. Pro tu jsou více zajímavé následující grafy.



Obrázek 5: Fluktuační rychlosti

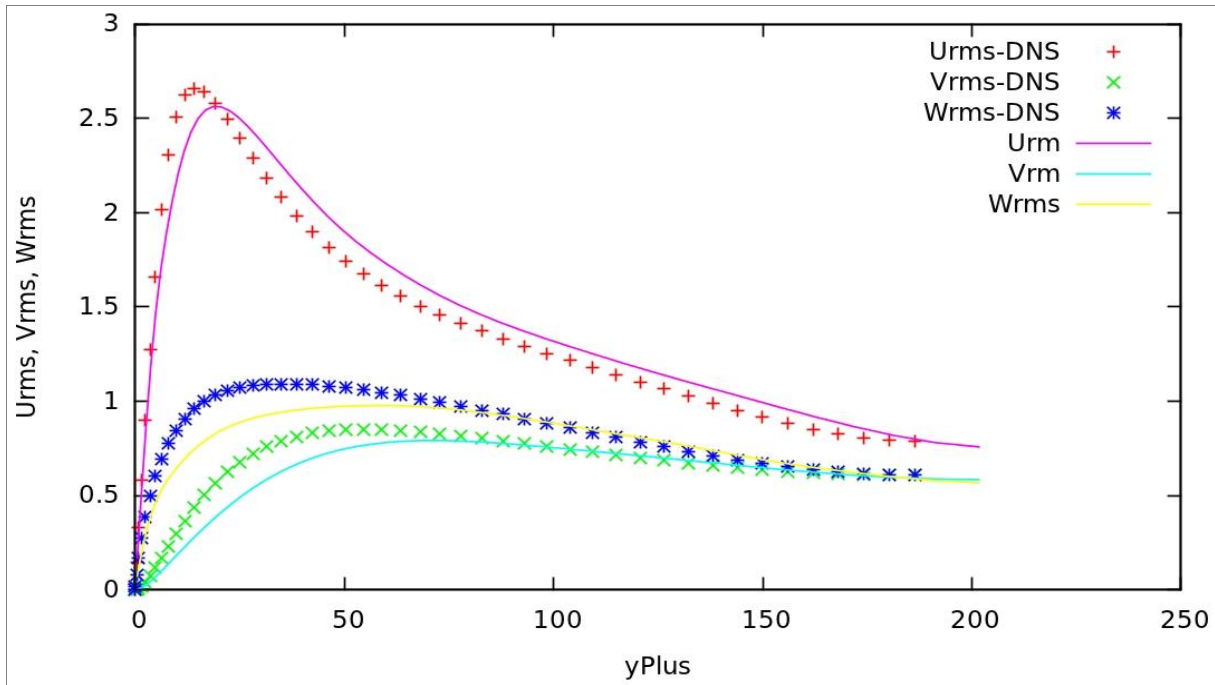


Obr. 6 Průběh průměrné normované rychlosti

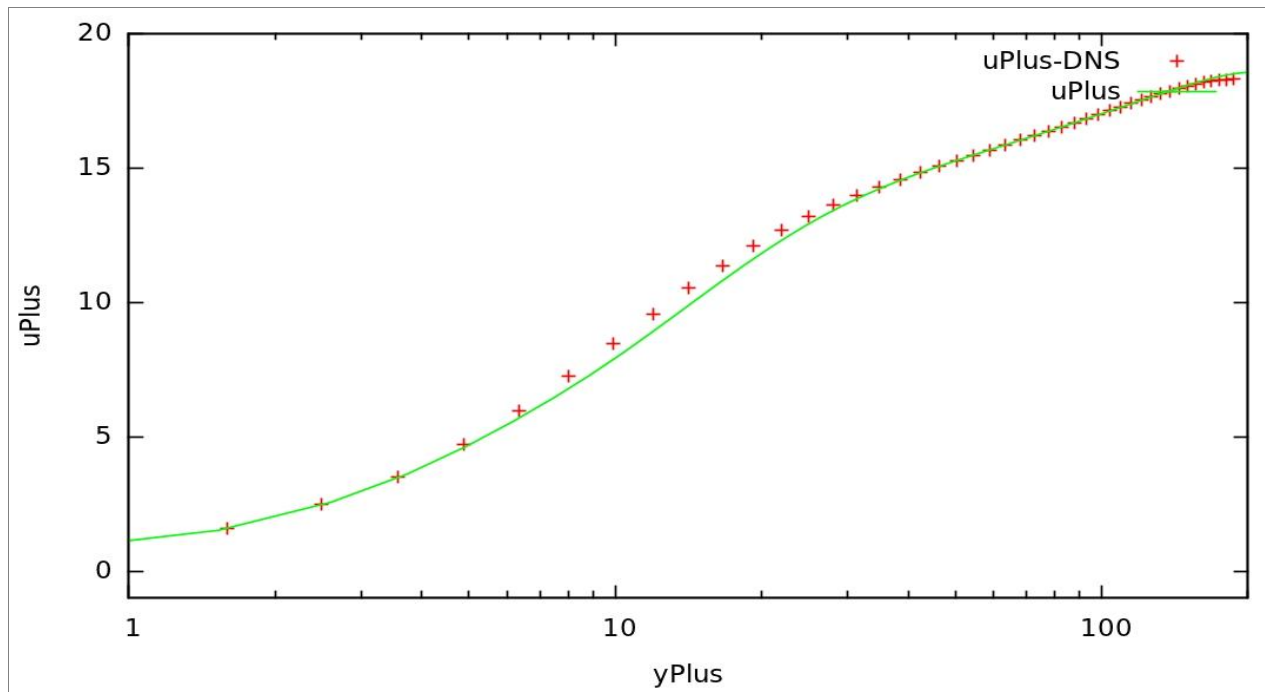
Z prvního tvaru je patrná shoda tvaru křivky fluktuační x-ové složky rychlosti s přímou simulací. Druhý graf, který zobrazuje průběh normované rychlosti na bezrozměrné vzdálenosti od stěny, se výsledkům z přímé simulace podobá už mnohem více.

4.2 Druhý výpočet

Výpočet druhý byl proveden na síti velikosti 240x120x100 buněk – celkový počet buněk tak dosáhl počtu 720 000.



Obrázek 6: Fluktuace rychlostí

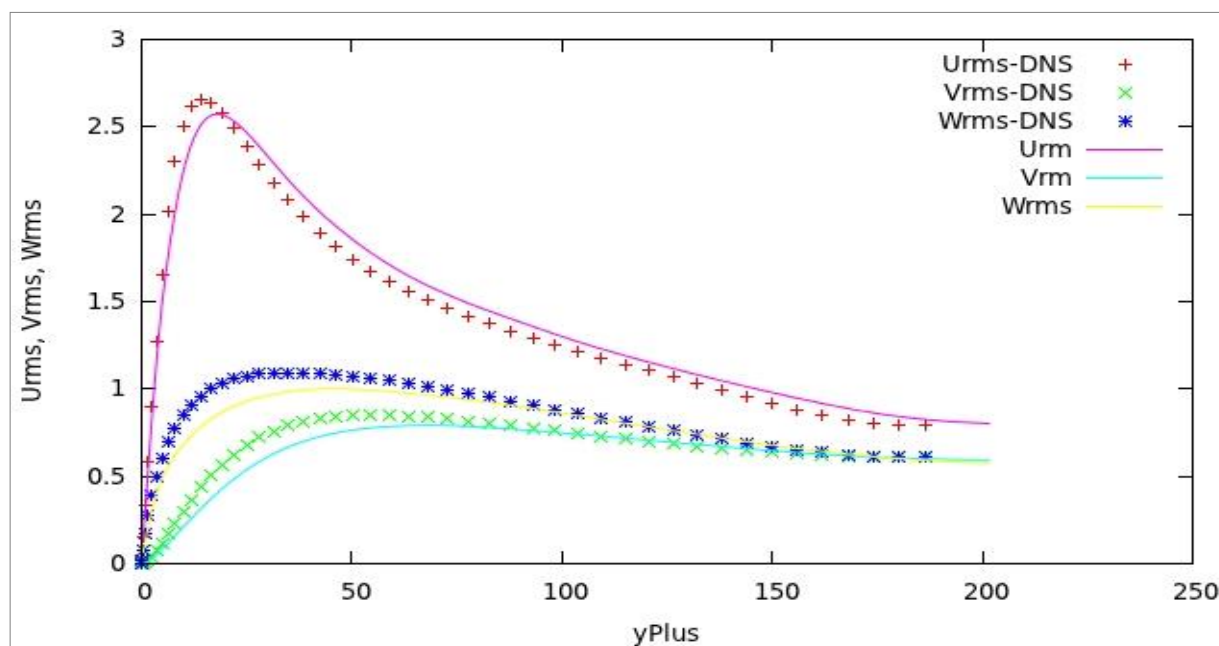


Obrázek 7: Průběh průměrné normované rychlosti

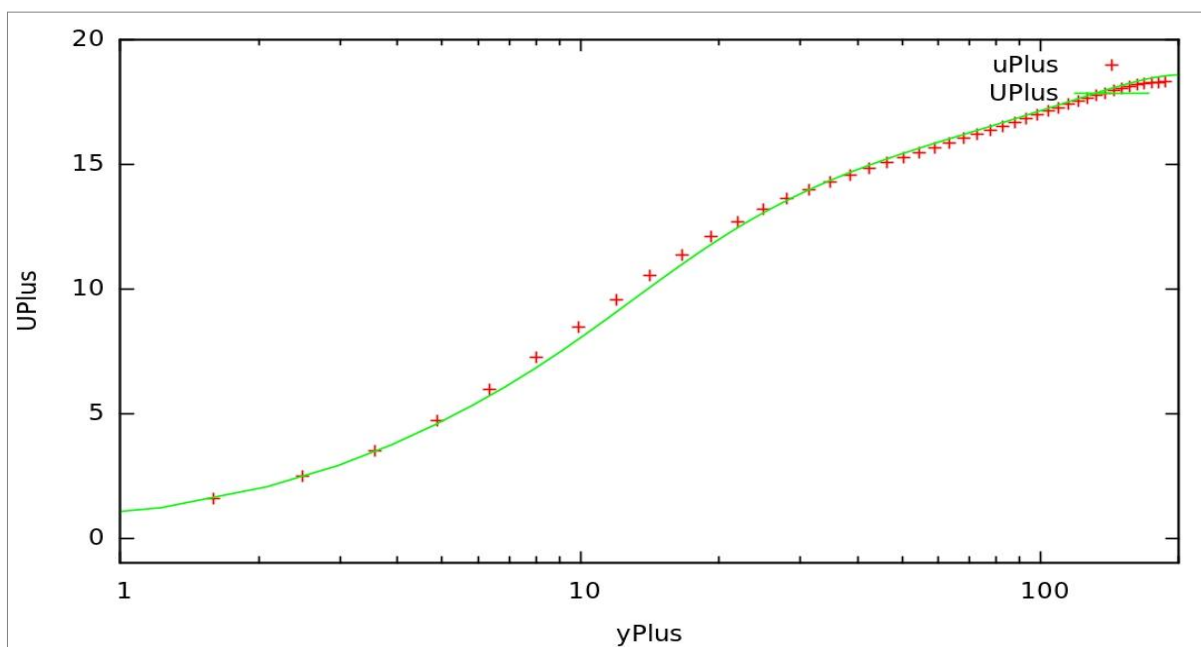
Z obou grafů je vidět jasné zlepšení oproti výpočtu na síti s menším rozlišením, přičemž u průběhu rychlosti došlo k úplné shodě s výpočtem přímou simulací.

4.3 Výpočet třetí

Rozlišení výpočetní oblasti u posledního kanálu bylo 320x148x124, což je 1 468 160 buněk.



Obrázek 8: Fluktuační rychlosti



Obrázek 9: Průběh průměrné normované rychlosti

V tomto případě je opět vidět zlepšení, sice ne tak velké jako mezi prvním a druhým výpočtem, však velké zlepšení je patrné v ypsilonové složce a v zetové složce fluktuací rychlostí.

5. Závěr

Výpočty prodění kanálem potvrdily vhodnost metody LES a jednorovnicového modelu pro další aplikaci. Také se ukázalo a bylo předpokládáno zlepšování výsledků simulace se zvětšujícím se rozlišením výpočetní sítě. Další zlepšení by bylo možno docílit laděním konstant jednorovnicového modelu, van Driestovy tlumící funkce nebo volbou jiných schémat.

Seznam symbolů

U	rychlost	[m/s]
t	čas	[s]
ϕ	skalární veličina	[-]
Γ	difuze	[m ² /s]
S	obsah	[m ²]
V	objem	[m ³]
d	délka	[m]
ν	kinematická viskozita	[m ² /s]
ν_k	turbulentní kinematická viskozita	[m ² /s]
Re	Reynoldsovo číslo	[-]
B	tenzor napětí	[m ² /s ²]
ε	disipační energie	[m ² /s ³]
k	turbulentní kinematická energie	[m ² /s ²]
U ⁺	normovaná rychlost	[-]
y ⁺	normovaná délka	[-]
Urms	normovaná fluktuace x-ové složky rychlosti	[-]
Vrms	normovaná fluktuace ypsilonové složky rychlosti	[-]
Wrms	normovaná fluktuace zetové složky rychlosti	[-]

Seznam použité literatury

- [1] ViLLIERS, E., *The Potential of large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows*. Imperial College of Science, Technology and Medicine: 2006. Disertační práce. Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mechanical Engineering

- [2] FUREBY, C., GOSMAN, A., D., TABOR, G., WELLER, H. G., *Large eddy simulation of turbulent channel flows*. London: Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Mechanical Engineering

- [3] SCHOPPA, W., HUSSAIN, F., *Coherent structure dynamics in near-wall turbulence*, Houston: University of Houston, 1999, TX77204-4792

- [4] HAREN, S.W., *Testing DNS capability of OpenFOAM and STAR-CCM+*, Delft: TU Delft 2011. Diplomová práce. TU Delft.