

# Výsledky implementace explicitní AUSM metody do prostředí OpenFOAM

Bc. Martin Kožíšek

Vedoucí práce: Doc. Ing. Jiří Fürst, Ph. D.

## **Abstrakt**

Účelem práce je ukázat dosavadní výsledky vývoje implementace numerické metody AUSM (Advection Upstream splitting method) do OpenFOAMu s důrazem na přednosti takového spojení.

## **Klíčová slova**

AUSM, numerická, metoda, upwind, stlačitelné, nevazké, proudění, GAMM, OpenFOAM

## **1. Úvod**

Spolehlivé numerické řešení stlačitelného proudění zejména v oblasti transsonických a supersonických rychlostí je základem pro mnoho technických aplikací. Velké programy pro numerické simulace proudění v současnosti příliš nedokáží splňovat vysoké nároky na stabilitu a dobré zachycení rázových vln. Vědecký pokrok v této oblasti přitom poskytuje metody, které se předhánějí ve správnosti svých výsledků. Takovou skupinu metod tvoří např. schemata využívající AUSM (Advection Upstream splitting method) přístup [1]. AUSM je upwind schéma prvního řádu přesnosti (volbou rekonstrukcí rozšiřitelné pro vyšší řády) navržené pro simulaci transsonického proudění s důrazem na schopnost zachytit nespojitosti v proudovém poli. Motivací k vývoji implementace AUSM do otevřeného programového balíku OpenFOAM je vytvořit dostatečně robustní, účinný a transparentní nástroj pro simulace transsonických proudových polí v turbínových mřížích v rámci společného výzkumu s oddělením Dynamiky tekutin Ústavu termomechaniky Akademie věd České republiky v. v. i. Cílem práce je ukázat první výsledky zatím explicitní varianty programu pro stlačitelné proudění nevazké tekutiny, na kterých jsou však již nyní dostatečně patrné výhody plynoucí ze spojení OpenFOAMu s AUSM.

## **2. Princip AUSM**

Pro představení principu AUSM metody je použit model 1D nevazkého proudění stlačitelné tekutiny kanálem s konstantním průřezem (1). Vektor  $\vec{F}$  reprezentuje tok a z fyzikální podstaty se skládá z konvektivní složky  $\vec{F}^{(c)}$  a tlakové složky  $\vec{F}^{(p)}$  (2). Z konvektivní složky lze vytknout společnou hustotu hmotnostního toku  $\dot{m} = \rho u$ . Dle teorie metody konečných objemů je užitím Gaussovy věty převeden objemový integrál divergence na plošný a po diskretizaci (4) vznikne otázka, jak interpolovat hodnoty  $\vec{F}$  ze středů buněk na jejich hranice (jinými slovy jak vypočítat numerický tok  $\vec{f}_{1/2}$ ). Jádro AUSM metody tkví právě v řešení tohoto problému.

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \text{div} \vec{F} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(c)} + \vec{F}^{(p)} = \dot{m} \vec{\Psi} + \vec{F}^{(p)}, \quad (2)$$

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix}, \quad \vec{F}^{(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\vec{f}_{i+1/2}^n - \vec{f}_{i-1/2}^n). \quad (4)$$

Jedna z možností zápisu numerického toku je v rovnici (5), kde indexy  $L$  a  $R$  označují levou a pravou buňku příslušné hranice. Hustota hmotnostního toku na hranici je rozdělena na pozitivní (6) a negativní část (7) a je funkcí stavu vlevo i vpravo od hranice. Rychlost zvuku na hranici se nejjednodušeji určí jako aritmetický průměr sousedních hodnot. Klíčovou část však tvoří Machovo číslo na hranici (9), jež je definováno pomocí distribučních funkcí Machova čísla (10, 11). Jedná se o polynommické funkce (stupeň polynomu je označen v indexu distribuční funkce).

$$\vec{f}_{1/2} = \dot{m}_{1/2}^+ \vec{\Psi}_L + \dot{m}_{1/2}^- \vec{\Psi}_R + \begin{pmatrix} 0 \\ p_{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\dot{m}_{1/2}^+ = \rho_L a_{1/2} M_{1/2}^+, \quad (6)$$

$$\dot{m}_{1/2}^- = \rho_R a_{1/2} M_{1/2}^-, \quad (7)$$

$$M_{1/2}^\pm = \frac{1}{2} (M_{1/2} \pm |M_{1/2}|), \quad (8)$$

$$M_{1/2} = M_{(4,\beta)}^+(M_L) + M_{(4,\beta)}^-(M_R), \quad (9)$$

Ty jsou konstruovány v první řadě tak, aby odrážely odlišnost v oblasti závislosti řešení v podzvukovém a nadzvukovém režimu, konkrétně aby bylo  $M_{1/2} = f(M_L, M_R)$  pro subsonické rychlosti a  $M_{1/2} = f(M_L)$  resp.  $M_{1/2} = f(M_R)$  pro supersonické rychlosti. Podobný účel mají i distribuční funkce tlaku (12), jimiž je rozepsána hodnota tlaku na hranici (13). Tyto polynommické funkce se dotvarují pomocí koeficientů  $\alpha$  a  $\beta$  (optimální hodnoty  $\alpha = 3/16$ ,  $\beta = 1/8$ , podrobněji viz [1]).

$$M_{(1)}^\pm(M) = \frac{(M \pm |M|)}{2}, \quad (10)$$

$$M_{(4,\beta)}^\pm(M) = \begin{cases} M_{(1)}^\pm(M) & \text{pro } |M| \geq 1, \\ \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 \pm \beta (M^2 - 1) & \text{pro } |M| < 1, \end{cases} \quad (11)$$

$$P_{(4,\beta)}^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{M} M_{(1)}^\pm(M) & \text{pro } |M| \geq 1, \\ \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \alpha M (M^2 - 1)^2 & \text{pro } |M| < 1, \end{cases} \quad (12)$$

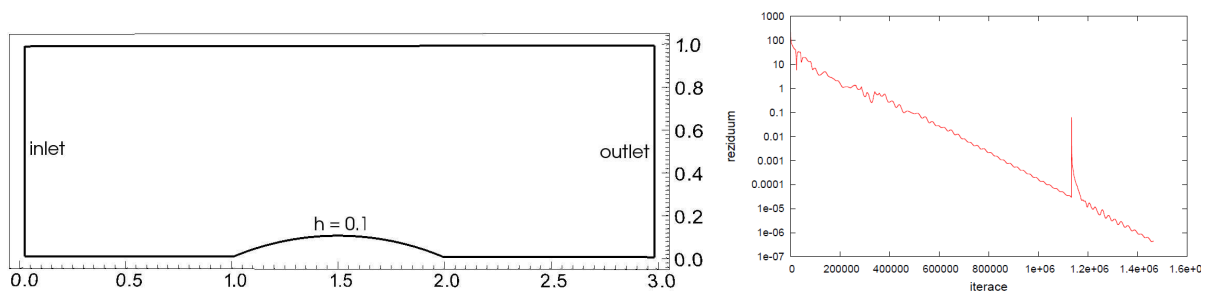
$$p_{1/2} = P_{(5,\alpha)}^+(M_L) p_L + P_{(5,\alpha)}^-(M_R) p_R. \quad (13)$$

### 3. Implementace do OpenFOAMu

OpenFOAM, software s otevřeným zdrojovým kódem (v.2.0.1), nabízí v oblasti řešení stlačitelného proudění dvě základní skupiny řešičů. První skupina zastoupená řešiči rhoSimpleFoam, rhoSimplecFoam, SonicFoam, rhoPimpleFoam a jejich odvozeninami používá algoritmy s korekcí tlaku a lze ji tedy označit za skupinu s implicitním popř. semiimplicitním přístupem. Konkrétně rhoSimpleFoam a rhoSimplecFoam využívají algoritmu SIMPLE [2] a jeho modifikace SIMPLIC. SonicFoam je implementací algoritmu PISO [2] a rhoPimpleFoam je kombinací PISO a SIMPLE algoritmu. Druhou skupinu tvoří explicitní řešič rhoCentralFoam, jenž využívá centrálního upwind schématu Kurganova a Tadmora [3]. Právě podobnost tohoto schématu s AUSM vedla k tomu, že zdrojový kód rhoCentralFoamu byl použit jako výchozí při implementaci AUSM do OpenFOAMu. Nově vzniklý řešič byl pojmenován explicitAUSMFoam a díky dobrému začlenění do objektově orientovaného C++ prostředí využívá veškeré možnosti, které jsou v OpenFOAMu dostupné pro tento typ řešiče.

### 4. Výsledky

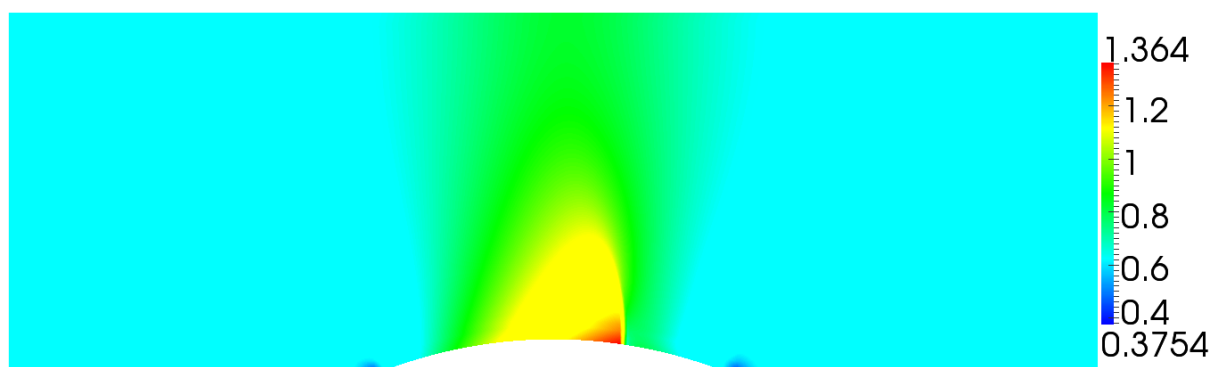
ExplicitAUSMFoam byl porovnán s vybranými standardními řešiči na úloze numerického řešení transsonického proudění nevazké tekutiny 2D GAMM kanálem. Geometrie kanálu je na obrázku 1. Byla použita strukturovaná síť se 150x50 čtyřúhelníky. Okrajové podmínky na vstupu jsou: Celkový tlak  $p_0 = 100$  kPa, celková teplota  $T_0 = 293,15$  K a homogenní Neumannova podmínka pro rychlost. Na výstupu je předepsán statický tlak  $p_2 = 73,7$  kPa a homogenní Neumannovy podmínky pro rychlost a teplotu. Toto nastavení odpovídá výstupnímu izentropickému Machovu číslu  $M_{2is} = 0,675$ . Ostatní plochy jsou definovány jako nepropustné stěny. Všechny výpočty byly ukončeny po dosažení ustáleného stavu.



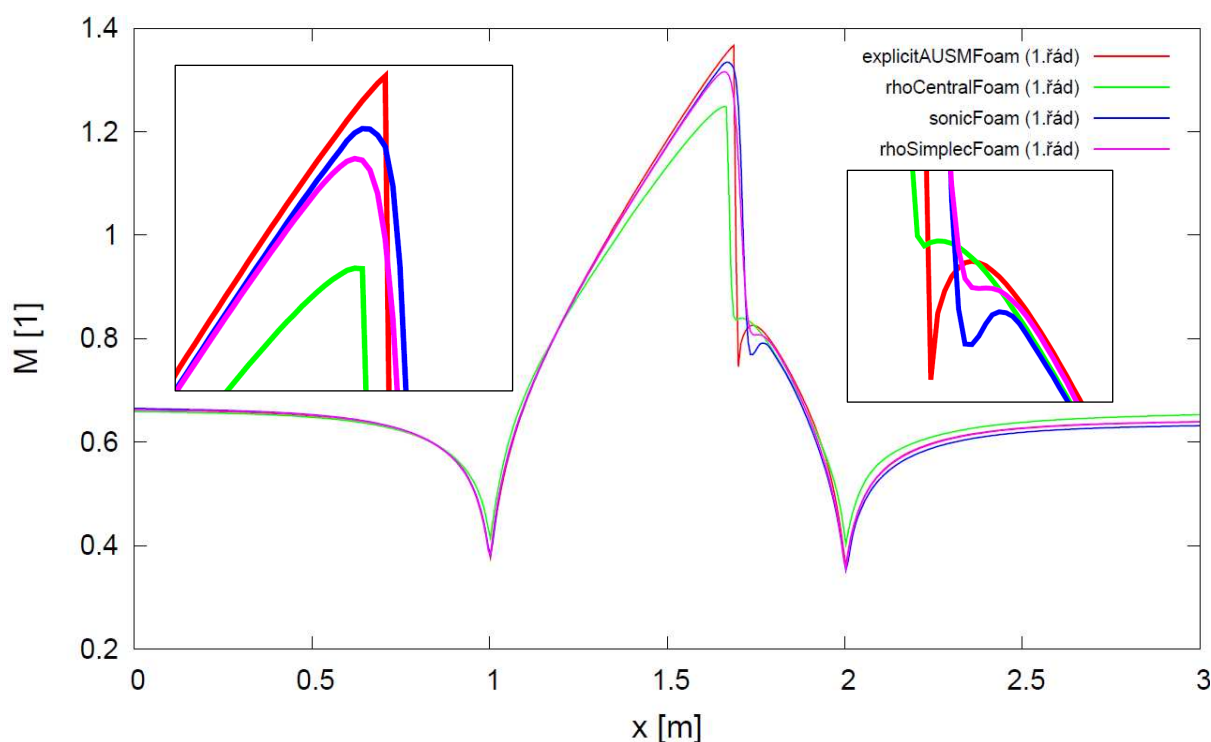
**Obr. 1.** Geometrie 2D GAMM kanálu (vlevo) a průběh rezidua (derivace hustoty podle času) explicitAUSMFoamu 1.řádu přesnosti (vpravo).

#### 4.1 Výpočet s 1. řádem přesnosti

Na hodnotách Machova čísla v kanálu při výpočtu explicitAUSMFoamem (obr. 2) je viditelná obvyklá kolmá rázová vlna. Porovnání výsledků 1. řádu přesnosti se standardními řešiči je v rozložení Machova čísla na spodní stěně kanálu (obr. 3). Zachycení rázové vlny potvrzuje domněnku z úvodu, totiž že standardní řešiče nejsou ani pro relativně triviální úlohu transsonického proudění schopné poskytnout příliš věrohodné výsledky. Implicitní řešiče sonicFoam ( $M_{max} = 1,33$ ) a rhoSimplecFoam ( $M_{max} = 1,32$ ) zachytily rázovou vlnu v řádově více bodech sítě než explicitní rhoCentralFoam a explicitAUSMFoam. RhoCentralFoam zachytil nespojitost na dvou až třech bodech sítě, avšak výsledná rázová vlna je příliš slabá ( $M_{max} = 1,25$ ). ExplicitAUSMFoam zachytil ostře rázovou vlnu a její velikost ( $M_{max} = 1,36$ ) se blíží obecně očekávaným výsledkům.



**Obr. 2.** Hodnoty Machova čísla v Gamm kanálu, výsledek explicitAUSMFoamu s 1.řádem přesnosti.



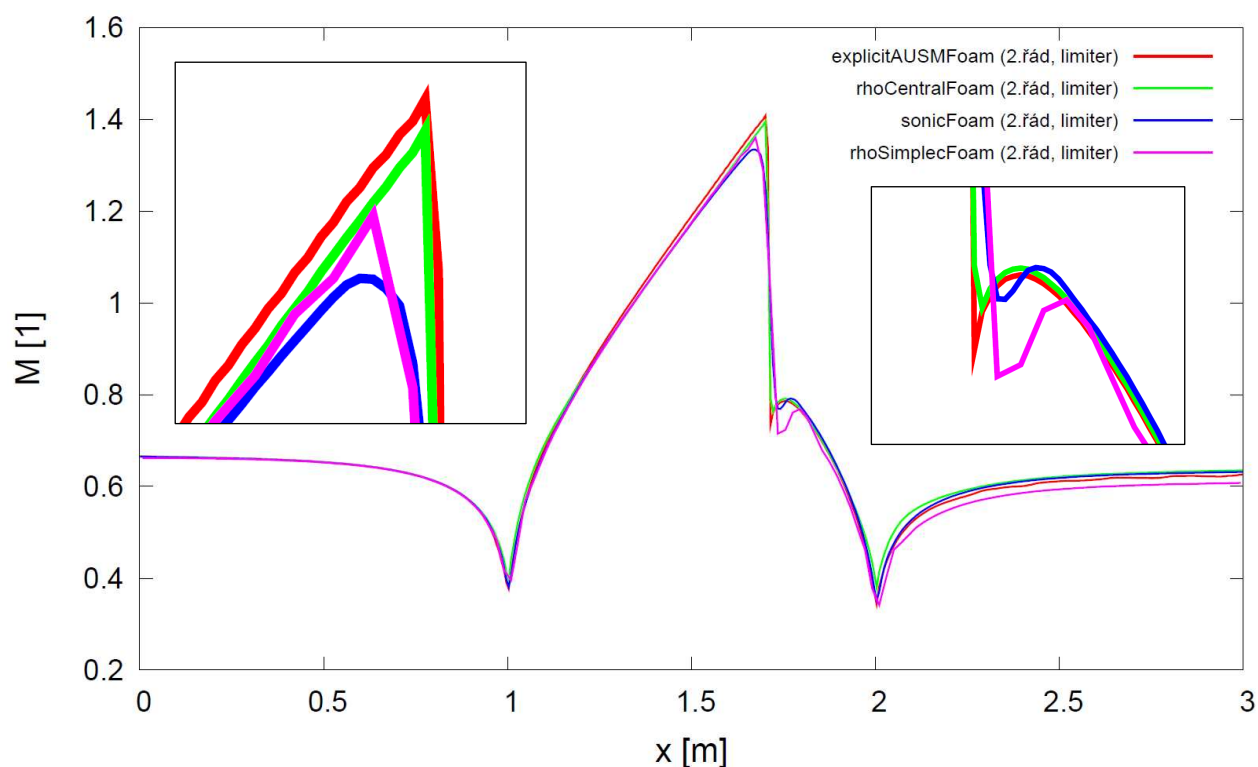
**Obr. 3.** Rozložení Machova čísla na spodní stěně Gamm kanálu, výsledky 1.řádu přesnosti.

#### 4.2 Výpočet 2. řádu přesnosti s limiterem

Velkou výhodou spojení s OpenFOAMem je např. možnost o řád zvýšit přesnost použitím lineárních rekonstrukcí omezených limiterem. Porovnání výsledků 2. řádu přesnosti s Van Leerovým limiterem je na obr. 4. SonicFoam ( $M_{max} = 1,335$ ) ani v 2. řádu přesnosti rázovou vlnu příliš ostře nezachytil, zatímco rhoSimplecFoam ( $M_{max} = 1,361$ ) dokázal zachytit ráz přesněji, avšak za cenu velké citlivosti na nastavení relaxačních koeficientů. RhoCentralFoam ( $M_{max} = 1,396$ ) se kvalitativně zcela vyrovnal explicitAUSMFoamu ( $M_{max} = 1,408$ ).

#### 4.3 Shrnutí výsledků

Explicitní řešiče rhoCentralFoam a explicitAUSMFoam dokázaly výrazně přesněji zachytit nespojitosti. Nabízí se dva důvody. Jednak jsou oba postaveny na upwind schématu a také postrádají nutná zjednodušení, jakými se vyznačují diskutované implicitní algoritmy. Na druhou stranu explicitní řešení rovnic vyžaduje pro praktické použití příliš přísná kritéria na volbu časového kroku. Cílem dalšího zájmu je proto vývoj AUSM ve formulaci s tlakovými korekcemi [4].



**Obr. 4.** Rozložení Machova čísla na spodní stěně 2D GAMM kanálu, výsledky 2.řádu přesnosti omezené Van Leerovým limiterem.

## 5. Závěr

Explicitní AUSM metoda byla úspěšně implementována do prostředí OpenFOAM. Díky tomu byl získán nástroj, který je schopný numericky řešit transsonické proudové pole a dobře zachytit nespojitosti, což se ukázalo na porovnání výsledků s výsledky standardních řešičů OpenFOAMu. Ze spojení s OpenFOAMem plyne celá řada dalších výhod:

- Lze zvýšit řád přesnosti s výběrem limiteru.
- Běh programu explicitAUSMFoam se dá paralelizovat (MPI knihovna), čehož se při výpočtu úspěšně využilo.
- Lze simulovat 1D, 2D i 3D (viz výsledky 3D v [5]) proudění.
- Předpokládá se snadné spojení s dostupnými modely turbulence ve variantě programu s vazkými členy.
- Lze vybírat metody numerické lineární algebry dostupné v OpenFOAMu.
- Zdrojový kód programu je transparentní, stejně jako okolní prostředí OpenFOAM.

Nevýhodou programu je velké omezení ve volbě časového kroku plynoucí z explicitního způsobu výpočtu. Na rozdíl od rhoCentralFoamu, který podal kvalitativně podobné výsledky, existuje pro AUSM také implicitní formulace algoritmu pomocí tlakových korekcí. Tím by se omezení na velikost časového kroku výrazně zmírnilo. Tímto směrem se proto bude ubírat další vývoj.

### Seznam symbolů

$\alpha$	koeficient pro dotvarování polynomu	[°]
$\beta$	koeficient pro dotvarování polynomu	[°]

$a_{1/2}$	rychlost zvuku na hranici buněk	[m/s]
$\Delta t$	časový krok	[s]
$\Delta x$	prostorový krok	[m]
$\vec{F}$	vektor toku	$[\rho u, \rho u u + p, \rho u H]^T$
$\vec{F}^{(c)}$	konvektivní složka vektoru toku	$[\rho u, \rho u u, \rho u H]^T$
$H$	entalpie	[J kg <sup>-1</sup> ]
$h$	výška	[m]
$i$	označení buňky	[-]
$i+1/2$	index označující pravou hranici	[-]
$i-1/2$	index označující levou hranici	[-]
$M$	Machovo číslo	[-]
$M_{2is}$	izoentropické Machovo číslo na výstupu	[-]
$M_{(4,\beta)}$	Distribuční funkce Machova čísla (polynom 4.stupně)	[-]
$\dot{m}$	hustota hmotnostního toku	[kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]
$n$	značení časové vrstvy	[-]
$P_{(5,\alpha)}$	Distribuční funkce pro tlak (polynom 5.stupně)	[-]
$p$	tlak	[Pa]
$p_0$	celkový tlak	[Pa]
$p_2$	statický tlak na výstupu	[Pa]
$\rho$	hustota	[kg m <sup>-3</sup> ]
$T_0$	celková teplota	[K]
$u$	rychlost	[m s <sup>-1</sup> ]
$\vec{U}$	vektor	$[\rho, \rho u, \rho H]^T$
$1/2$	index označující hranici mezi dvěma buňkami sítě	[-]

### ***Seznam použité literatury***

- [1] M.-S. Liou, Mass flux schemes and connection to shock instability, Journal of Computational Physics 160 (2000) 623-648.
- [2] J. H. Ferziger, M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, 3rd Ed., 2001.
- [3] A. Kurganov, E. Tadmor, New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations, Journal of Computational Physics 160 (2000) 241-282.
- [4] Krista Nerinckx, Jan Vierendeels, Erik Dick: Mach-uniformity through the coupled pressure and temperature correction algorithm, JCP 206 (2005).
- [5] Kožíšek, Martin; Fürst, Jiří. Implementation of Explicit Advection Upstream Splitting Method into OpenFoam. In Conference Topical Problems of Fluid Mechanics 2012. Prague: Institute of Thermomechanics AS CR, v. v. i., 2012. S. 65-66. ISBN 978-80-87012-40-6. [Topical problems of fluid mechanics 2012, Prague, 15.02.2011-17.02.2012, CZ].

### ***Poděkování***

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT číslo SGS10/243/OHK2/3T/12.

Tato práce byla podpořena projektem GAP 101/10/1329 grantové agentury ČR.