

# Inverzní rotační kyvadlo

Bc. Dan Pilbauer

Vedoucí práce: prof. Ing. Milan Hofreiter CSc.

## **Abstrakt**

*Práce se zabývá konstrukcí inverzního kyvadla. Dále je v práci popsáno řešení elektrických zařízení, sběru dat do PC a jejich zpracování. Pro zkonstruované inverzní rotační kyvadlo je vytvořen model v prostředí Matlab, doplněný o 3D zobrazení. Pro reálné řízení je vytvořeno řízení pomocí regulátoru, který stabilizuje kyvadlo v požadované poloze.*

## **Klíčová slova**

*Inverzní kyvadlo, řízení, Lagrangeovy rovnice, simulace, PID regulátor*

## **1. Úvod**

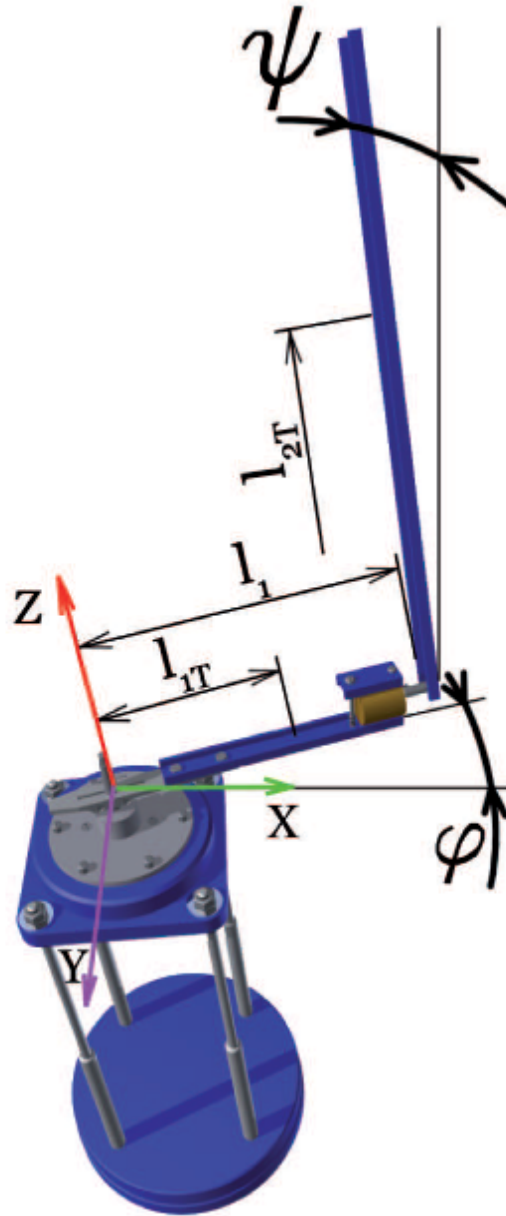
Cílem práce je návrh a realizace řízení laboratorní úlohy rotačního inverzního kyvadla (neboli furuta pendulum), jeho modelování v simulačním prostředí a následně i návrh řízení. Práce je rozdělena do několika částí. V první z nich se zabývám vyroběním a sestavením úlohy. Další kapitola líčí teoretický popis, odvození rovnic a poté i simulaci modelu. Modelování provedu pomocí Matlab – Simulink, kde je zapotřebí mít odvozené pohybové rovnice. Simulaci doplňuje 3D zobrazení kyvadla pomocí Virtual Reality Builder. K simulaci je vytvořené uživatelské rozhraní (GUI), pomocí kterého lze jednoduše ovládat simulaci a nastavovat parametry kyvadla. Potřebné pohybové rovnice odvodím pomocí Lagrangeových rovnic II. typu, u kterých vycházím z literatury teoretické mechaniky. Práce zahrnuje i linearizaci modelu inverzního kyvadla, kterou je potřeba znát k návrhu řízení. Linearizace platí pouze pro malé úhly, což by však mělo postačit pro návrh PID regulátoru, jelikož velké úhly již není možné vyregulovat. Pokud natočení překoná určitý úhel, následuje možnost buď odpojit řízení, či se pokusit o vyšvihnutí kyvadla zpět nahoru. V této práci se budu zabývat pouze řízením kyvadla v horní poloze, nikoli jeho vyšvihnutím.

V poslední části se budu věnovat popisu návrhu řízení pomocí programového prostředí LabVIEW od firmy National Instrument.

Praktické využití navrženého modelu má široký rozsah. Pokud by se například řešilo kyvadlo v dolní poloze, jedná se o klasický jeřáb otáčející se s břemenem. V horní poloze jde o známe vozítko značky Segway, a v neposlední řadě i lidské stání ve vzpřímené poloze.

## **2. Matematický popis a simulace**

Úloha je sestavena pro jednoduché řízení kyvadla v horní poloze. Úloha je zobrazena na obrázku č.1. Na schématu jsou naznačeny úhly a rozměry použité při odvozování a počítání. Úhel  $\varphi$  představuje úhel mezi počátkem souřadného systému a prvním ramenem kyvadla. V tomto případě nezáleží na zvolení počáteční polohy, neboť se zde nejedná o řízení polohy tohoto ramene. Úhel  $\psi$  má počátek splývající s osou Z, procházející spojením ramen. Jeho volba má důležitý význam, neboť je zde potřeba počítat s projekcemi natočení ramene.



**Obr. 1:** Schéma inverzního rotačního kyvadla

## 2.1 Pohybové rovnice

Model odvozují z Lagrangeových rovnic II.druhu. Jejich výpočet je poměrně pracný. Musíme správně stanovit Lagrangian soustavy. Výsledek pak tvoří dvě simultánní diferenciální rovnice druhého řádu. Popis soustavy je na základě schématu zobrazeném na obr. 1. Získaný lagrangian soustavy je:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 l_{1T}^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_1^2 \dot{\varphi}^2 + l_{2T}^2 \dot{\psi}^2 + 2l_1 l_{2T} \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi + l_{2T}^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \psi \right) + m g l_{2T} \cos \psi \quad (1)$$

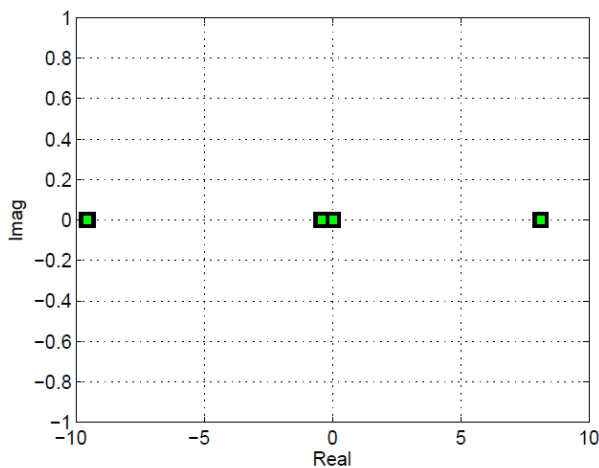
Ze znalosti Lagrangianu můžeme odvodit soustavu rovnic. Výsledkem je soustava dvou diferenciálních rovnic druhého řádu.

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} m_2 l_1 l_{2T} \ddot{\psi} \cos \psi - m_2 l_1 l_{2T} \dot{\psi}^2 \sin \psi + 2m_2 l_{2T}^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + \ddot{\varphi} (m_2 l_{2T}^2 \sin^2 \psi + m_2 l_1^2 + m_1 l_{1T}^2 + J_1) \\ l_1 l_{2T} m_2 \ddot{\varphi} \cos \psi + m_2 l_{2T}^2 \ddot{\psi} + J_2 \ddot{\psi} - m_2 l_1 l_{2T} \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} d_1 \dot{\varphi} \\ d_2 \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2) \\
 & \left[ \begin{array}{c} m_2 l_{2T}^2 \dot{\varphi}^2 \cos \psi \sin \psi - m_2 l_1 l_{2T} \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi - m g l_{2T} \sin \psi \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Na soustavu se dále aplikovala linearizme ze kterých se vyšlo pro sestavení stavového popisu systému ve tvaru :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \mathbf{A} + \mathbf{B}u \\
 y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad (3)
 \end{aligned}$$

S tímto tvarem se dále počítaly póly systému a další vlastnosti, které popisují soustavu v okolí řízeného bodu. Na Obr. 2 je vidět rozložení pólů soustavy v horní poloze.



**Obr. 2:** rozložení pólů

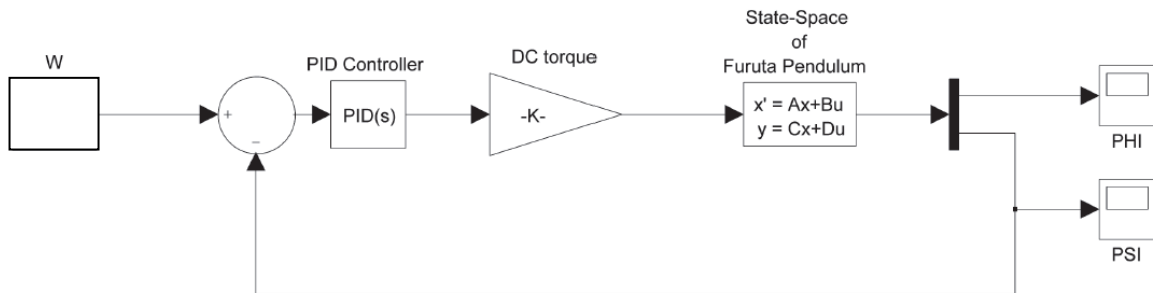
**Tabulka 1:** póly systému

Pól	Reálná část	Imaginární
$p_1$	0	0
$p_2$	-9.5606	0
$p_3$	8.1317	0
$p_4$	-0.42197	0

## 2.2 Návrh řízení

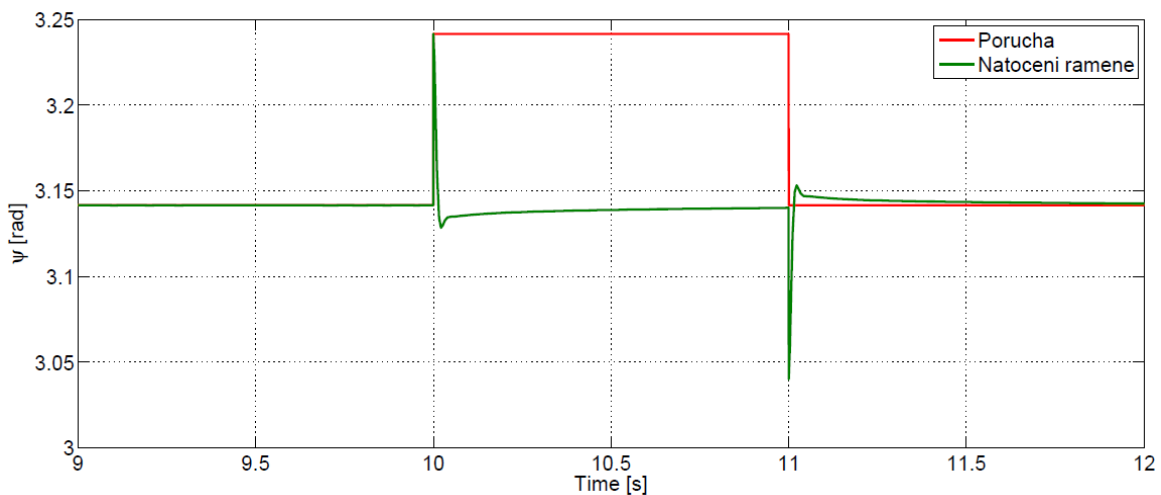
Návrh řízení zde vychází z předchozí kapitoly 2.1, kde jsem zjistil stavový popis systému. Řízení by bylo možné navrhnout jak stavové, které by mohlo vést k lepším výsledkům, tak i řízení pomocí PID regulátoru. PID regulátor je zde použit pro řízení. Jeho návrh je zde ponechán prostředí Matlab.

Schéma regulační smyčky je zobrazeno na Obr. 3, kde je do modelu přidán ještě model DC motoru s převodem. Jelikož je zde použito řízení momentu motoru pomocí proudu, lze do určité míry model zjednodušit na lineární závislost.



**Obr. 3:** schéma regulační smyčky

Soustavu bylo nutné ještě nadále ošetřit dalšími vlivy, jako je saturace řídicího napětí atp., pro znázornění ale stačil Obr. 3. Na dalším obrázku(Obr. 4) je viděl odezva na poruchu v podobě momentu působícího na rameno kyvadla.

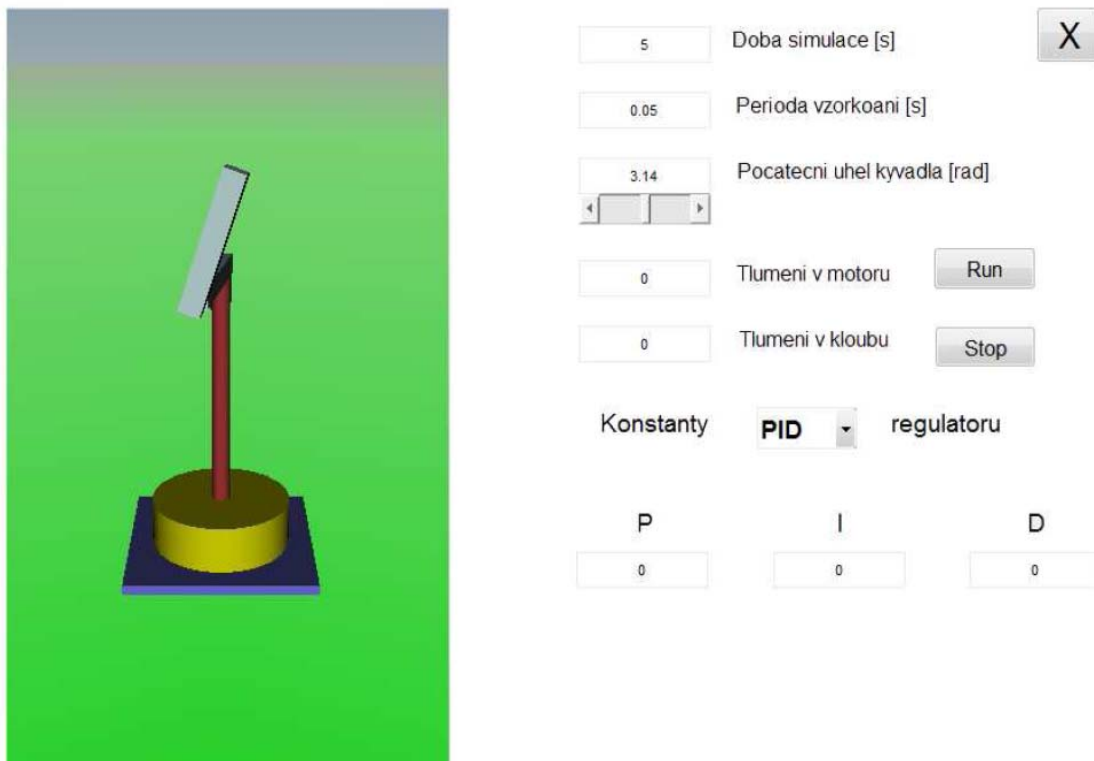


**Obr. 4:** Odezva systému na poruchu

### 2.3 Uživatelské prostředí pro model

Pro nelineární model je vytvořeno uživatelské prostředí, které má podobu zobrazenou na Obr. 5. Levá část zobrazuje aktuální polohu kyvadla. Po spuštění pomocí tlačítka „run“ se spustí běh a lze sledovat průběh regulace v 3D prostředí. V pravé části se nastavují parametry simulace, tj. doba simulace, perioda vzorkování.

Dále lze v simulaci nastavovat počáteční úhel kyvadla, disipační členy, které mají za následek tření v kloubech. Simulaci doplňuje možnost nastavování regulátoru, kde ve scrollovacím menu lze vybrat typ regulátoru a následně jeho koeficienty. Simulace může občas mít potíže při vyřešení nelineárních rovnic. Tento problém by se dal vyřešit, pokud bychom při odvození rovnic nepoužili Lagrangeovy rovnice II. druhu, ale Hamiltonovy kanonické rovnice, které jsou numericky více stabilnější a jejich výsledkem je již soustava diferenciálních rovnic 1. řádu. Rovnice v tomto tvaru lze rovnou numericky řešit a není potřeba (jako tomu bylo u současných rovnic) vyjadřovat nejvyšší derivaci.



Obr. 5: Uživatelské rozhraní pro model

### 3. Sestavení úlohy

Tato kapitola se zabývá sestavením úlohy a dělí se na mechanickou část a elektrickou část, kde je popsáno, ze kterých částí byla úloha sestavena a jak byly jednotlivé části vyrobené.

#### 3.1 Mechanické části

Kyvadlo tvoří těžký podstavec vyrobený Al slitiny 444201.01, pro udržení úlohy na místě při spuštění a při běhu programu, kde by mohlo dojít k rozkmitání, smykání po povrchu a následnému poškození úlohy. Podstavec je zobrazen na Obr. 6. Povrch podstavce je chráněn vrstvou eloxu podle normy ONL1831 ozn. ELOX 8 ONL 1831.15 z důvodu ochrany vůči vnějším vlivům prostředí.



**Obr. 6:** Podstavec

Další část se skládá ze čtyř tyčí, které v určité výšce drží zbytek sestavy. Tyče jsou vyrobeny z nerezové oceli oz. 17 022.6.



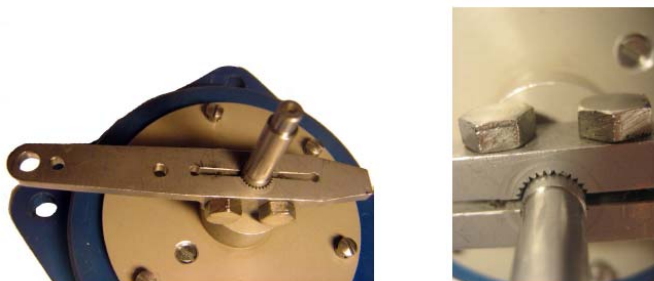
**Obr. 7:** Tyče na podstavci

Na tyče je přidělán přípravek přípravek tvořený z více částí a slouží k držení motoru s převodem.



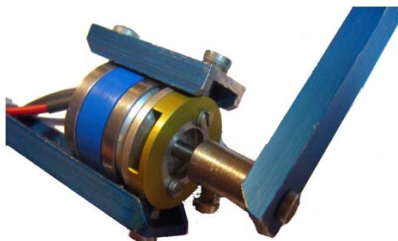
**Obr. 8:** Přípravek na držení motoru

Na hřídel z motoru je přiděláno první rameno pomocí svěrného spoje



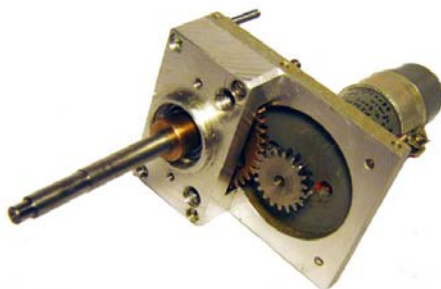
**Obr. 9:** svěrný spoj na hřídeli motoru s detailem vpravo

Druhé rameno je spojeno přes hřídel potenciometru, který slouží i jako snímač natočení ramene.



**Obr. 10:** Potenciometr jako rotační vazba

Jako pohon je zde použit motor s převodem. Tyto dvě části jsou spojené pomocí přípravku, vyrobený z pouzdra na čerpadlo, ve kterém byl motor s převodem již spojen, ale ve špatném uspořádání a bylo ho tedy nutné předělat do současné podoby.

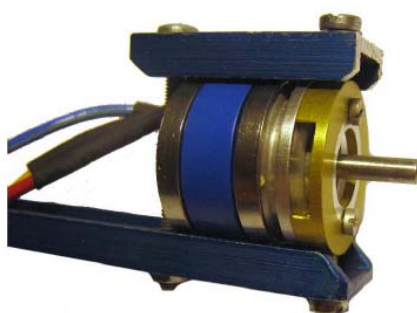


**Obr. 11:** Motor spojený s převodem

### 3.2 Elektrické části

Pro snímání natočení bylo potřeba použít snímač s dostatečnou přesností. Inkrementální snímače jsou buď velké a těžké nebo malé a velmi drahé. Z tohoto důvodu jsem zvolil pro snímání přesného potenciometru, upraveného pro kontinuální otáčení. Toto velmi usnadní ošetřování koncových dorazů a případnému poškození. Problém je jen v překročení maximálního a minimálního napětí při otáčení, kde dojde ke skokové změně. V tomto případě však není potřeba toto ošetřovat, jelikož se kyvadlo řídí pouze v horní poloze. Tedy vhodným natočením při upevnění se do tohoto bodu nedostane.

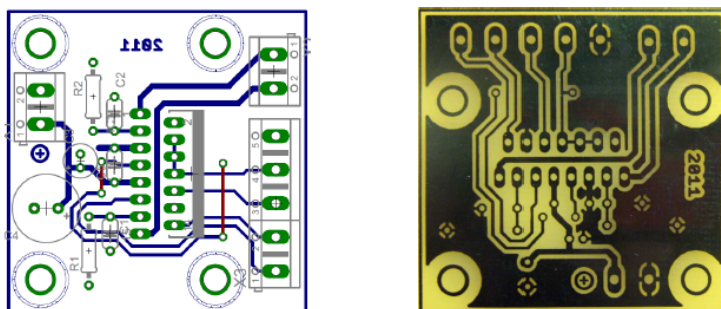
Potenciometr typu 3585S-1-103 od firmy BOURNS (na Obr. 12) sloužící k přesnému měření úhlů. Přibližné rozlišení snímače odpovídá 0,097%. Jestliže tedy má odpor 10k $\Omega$  lze se dopočítat k rozlišovací schopnosti přibližně rovné 0,35°.



**Obr. 12:** Potenciometr snímající natočení kyvadla

Jako další elektrickou částí je aktuátor, zde tedy DC motor s permanentními magnety, od firmy ATAS elektromotory Náchod a.s., motor má označení P2HH 407. Motor je zobrazen na Obr. 11, kde je spojen s převodem.

Motor je řízen pomocí obvodu LMD18245T, který zajišťuje proudové řízení motoru pomocí pulsně šířkové modulace (PWM). Obvod LMD18245T od firmy National Semiconductor je integrovaný H-můstek, který má navíc v sobě ochrany proti přehřátí a nadproudovou ochranu. K obvodu bylo nutné vytvořit plošný spoj. K navržení desky plošných spojů jsem použil program EAGLE verze 5.11.0 od firmy CadSoft Computer GmbH, na základě kterého byla následně vyrobena. Výrobu jsem provedl pomocí fotocitlivé vrstvy. Folie byla nejdříve osvětlena na desku, osvětlená část se vyvolala pomocí vývojky a následně se vyleptala v roztoku. Výsledek je vidět na Obr. 13



**Obr. 13:** Plošný spoj (návrh- vlevo, výrobek- vpravo)

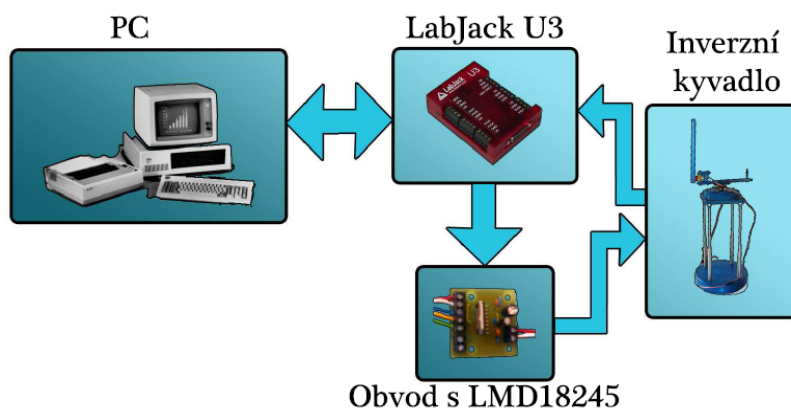


Ke převodům AD/DA jsem použil výrobek od firmy LabJack corp.- LabJack U3 HV. Tato řídicí jednotka disponuje dostatečnými vlastnostmi nezbytnými k jednoduchému řízení inverzního kyvadla. K její poměrně nízké ceně má rychlé vzorkování a dostatek vstupů/výstupů. Komunikaci zprostředkovává rozhraní USB 2.0.



**Obr. 14:** Řídicí jednotka LabJack U3. Zdroj: <http://labjack.cz>

Všechny vypsane komponenty jsou vzájemně propojeny a komunikují spolu. Na schématu (Obr. 15) lze vidět, jak spolu komunikují jednotlivé části úlohy.



**Obr. 15:** Schéma komunikace

## 4. Realizace řízení

Zde se zabývám realizací softwarové části, použité pro řízení kyvadla v horní poloze. Doby kmitů kyvadla se pohybují v desítkách, maximálně stovkách milisekund. Program musí tedy běžet ve velmi krátkých cyklech, aby se stihla kompenzovat výchylka. Pokud by nebyla reakce dostatečně rychlá, nebylo by možné již vyregulovat kyvadlo. Pro takovéto případy je možné zkratovat vinutí motoru a nechat kyvadlo spadnout nebo se pokusit o jeho opětovné vyšvihnutí.

### 4.1 Software

S výběrem software jsem byl omezen především možnostmi školních verzí. Škola má k dispozici řadu profesionálních programů, které lze použít. Můj zájem byl především pro Matlab, který poskytuje mnoho nástrojů k řízení. Matlab však není primárně určen k řízení. Matlab by bylo možné použít s kartou od firmy Humusoft, které jsou ale velmi drahé. Matlab zde byl tedy použit pouze pro simulaci a výpočty.

K řízení jsem nakonec použil programové prostředí od firmy National Instruments – LabVIEW. Primárním kritériem pro mne byla hlavně perioda cyklů, která zde byla oproti Matlab mnohonásobně nižší.

### 4.2 Programové zpracování

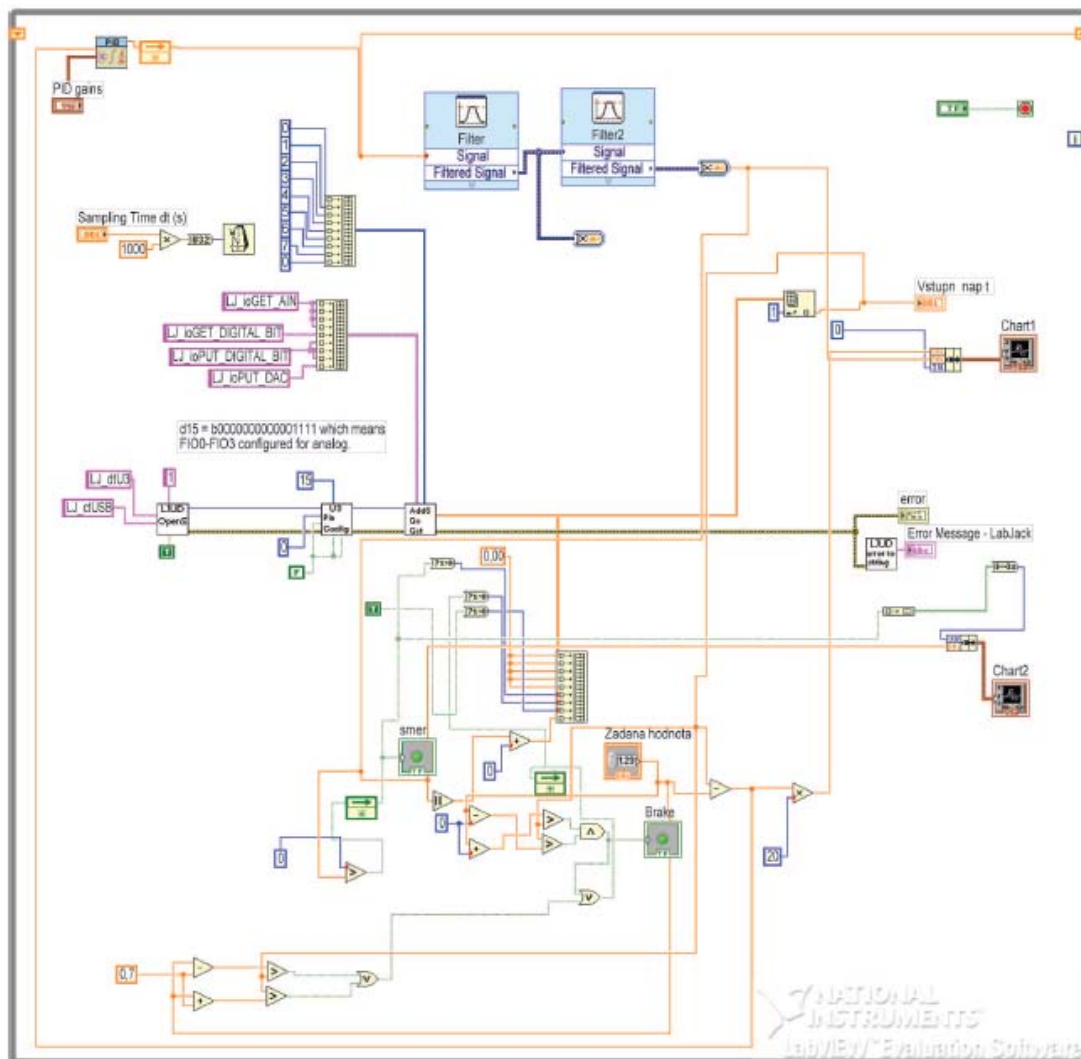
Programové zpracování bylo provedeno v prostředí LabVIEW, kde je tvorba rozdělena do dvou částí. Přední panel slouží k ovládání vytvořeného programu a zadní panel, který slouží k programování ve smyslu vkládání funkčních bloků a jejich vzájemné propojování.

Na Obr. 16 je vidět přední panel, kde se po spuštění zobrazí dva grafy, které znázorňují průběhy regulace, akčních zásahů a regulační odchylky. Dále jsou na obrázku vidět ovládací prvky programu.



Obr. 16: Přední panel programu v LabVIEW

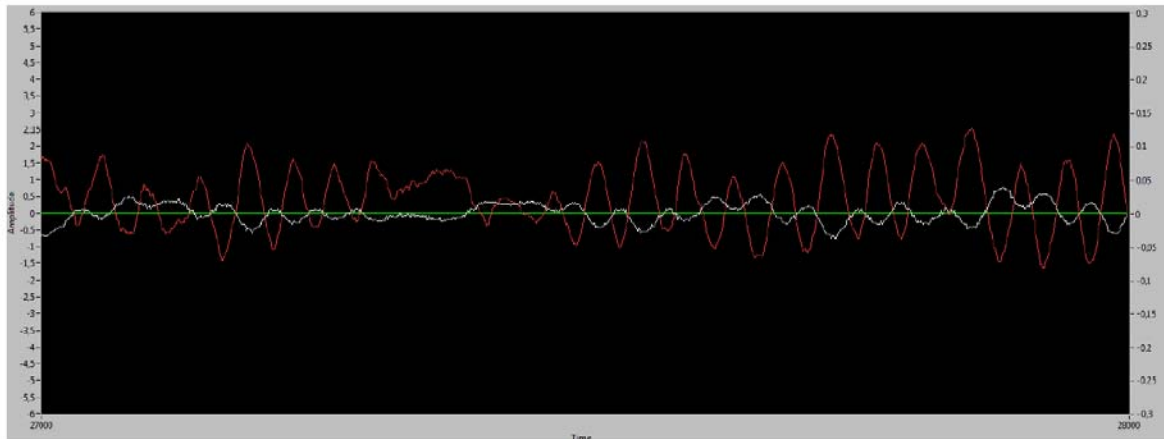
Na Obr. 17 je zobrazena zadní panel programu, kde je naprogramovaná smyčka programu, ošetření mezních úhlů, kde se vypne motor a filtry.



Obr. 17: Zadní panel programu v LabVIEW

### 4.3 Výsledná regulace

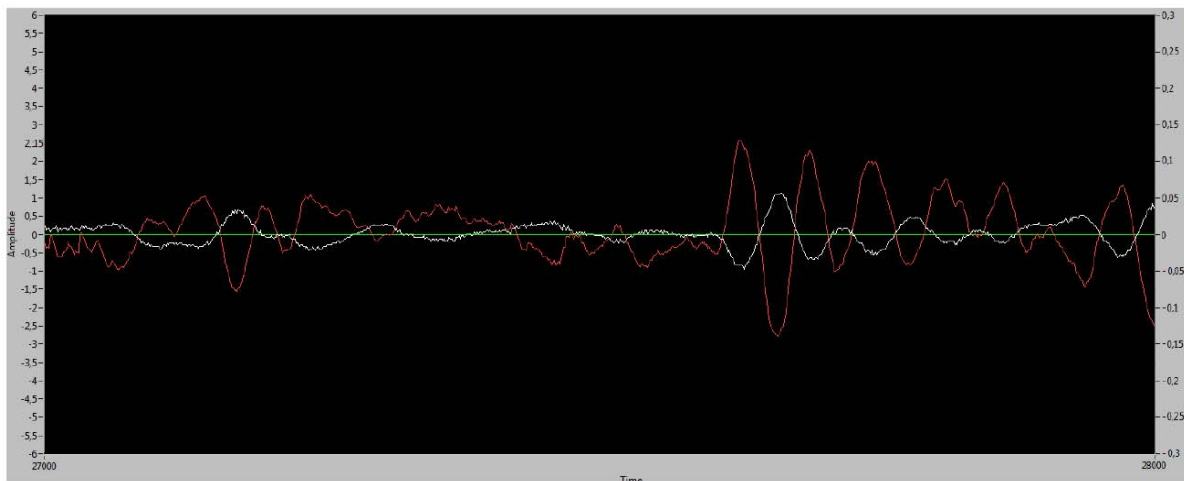
Reálnou regulaci zobrazuje Obr. 18, kde červená barva reprezentuje napětí, jdoucí do řídicího obvodu motoru ve voltech. Bílá barva zobrazuje regulační odchylku. Oba signály jsou v jednom grafu s odlišnými osami, aby byl vidět akční zásah na danou odchylku.



Obr. 18: Průběh regulace

Odchytky od žádané veličiny nejsou příliš velké a motor s přehledem zvládá jejich vyregulování. Akční zásah má maximální napětí okolo 2,5V, což odpovídá 50% maximálního napětí. Regulační pochod by se tedy dal zrychlit a zlepšit tím regulaci. Pro takovéto řízení by bylo ovšem pravděpodobně sofistikovanější regulátor než PID regulátor.

Na dalším obrázku zobrazuji stejnou regulaci, jen do regulační smyčky jsem vložil poruchu v podobě momentu na Romano. Zanesení poruchy je provedeno manuálně, vychýlením kyvadla z horní polohy. V průběhu lze tento skok vidět v prudkém nárůstu napětí na výstupu.



Obr. 19: Průběh regulace s poruchou

## 5. Závěr

Při sestavení se naskytlo mnoho možností jak postupovat. Vycházel jsem převážně ze svých zkušeností a ty využil k použití daných prvků. Prvky by šlo řešit i jinými způsoby, pravděpodobně i lepšími, které by samozřejmě mohly být mnohem dražší. Často by nebylo potřeba ani nic vyrábět a jednotlivé části koupit. Rozhodování bylo i při přidávání mechanického převodu k motoru. Zvýšení momentu jsem považoval za nezbytné i za cenu dalších tření v ozubení a uložení.

Velký problém bylo vyřešit snímání natočení, zejména v ohledu na regulaci. Snímání má diskrétní charakter a jeho vliv na derivační složku regulátoru byl poměrně značný. Pro tento účel byly přidány alespoň softwarové filtry, které by bylo možné obohatit o elektrické filtry za snímačem.

Při simulaci byly problémy převážně s numerickými metodami, kde nebylo vhodně řešené matematické odvození, pro návrh řízení toto neměl tento problém již takový vliv, neboť se vycházelo z linearizovaného modelu.

Při výběru softwaru jsem opět využil zkušeností s programem LabVIEW, který v posledních verzích dokáže být velice užitečným k řízení. Řízení by bylo možné doplnit o některý z produktů firmy National Instruments, například produkty řady cRIO. cRIO disponuje FPGA hradlovými poli, se kterým by bylo řízení o mnoho vylepšeno.

Pro sestavený model bylo nakonec možné navrhnout řízení a tím tuto úlohu dokončit. Určitě by ale bylo dobré tuto úlohu ještě vylepšit o snímání druhého natočení. Snímáním by se mohl i řídit úhel, kde má motor setrvávat.

V současné době pracuji na sběracích kartáčcích, které budou přenášet signál ze snímače a vodiče nebudou tak ovlivňovat regulaci.

### *Seznam symbolů*

$l_{1T}$  ... délka prvního ramene...[m]

$l_{2T}$  ... délka druhého ramene...[m]

$\varphi$  ... natočení prvního ramene...[rad]

$\psi$  ... natočení druhého ramene...[rad]

$m_1$  ... hmotnost prvního ramene...[kg]

$m_2$  ... hmotnost druhého ramene...[kg]

$g$  ... gravitační zrychlení...  $\left[ \frac{m}{s^2} \right]$

### ***Seznam použité literatury***

[1] Zítek, P., Petrová, R. (1996), *Matematické a simulační modely*, Praha: Vydavatelství ČVUT. ISBN 80-01-01524-6.

[2] Leinveber, J., VÁvra, P. (2006), *Strojnické tabulky – Třetí doplněné vydání*, Úvaly: Vydavatelství Albra. ISBN 80-7361-033-7.

[3] Pospíchal, J. (2004), *Technické kreslení*, Praha: Vydavatelství ČVUT. ISBN 80-01-02196-3.

[4] Klusáček, O. (2009), *Modelování, identifikace a řízení rotačního kyvadla*, Brno

### ***Internetové zdroje***

[5] Kulhánek, P. (2010), *TF1: Teoretická mechanika*, Praha: FEL ČVUT.  
<http://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>

[6] LabJack U3 User's Guide: <http://www.hw.cz/pdf/LabJack-U3-Users-Guide.pdf>

[7] American Journal of Applied Sciences 6, *Real-Time Optimal Control for Rotary Inverted Pendulum* : <http://www.scipub.org/fulltext/ajas/ajas661106-1115.pdf>

[8] C.J.A. van Kats, *Nonlinear control of a Furuta Rotary inverted pendulum*:  
<http://alexandria.tue.nl/repository/books/625748.pdf>