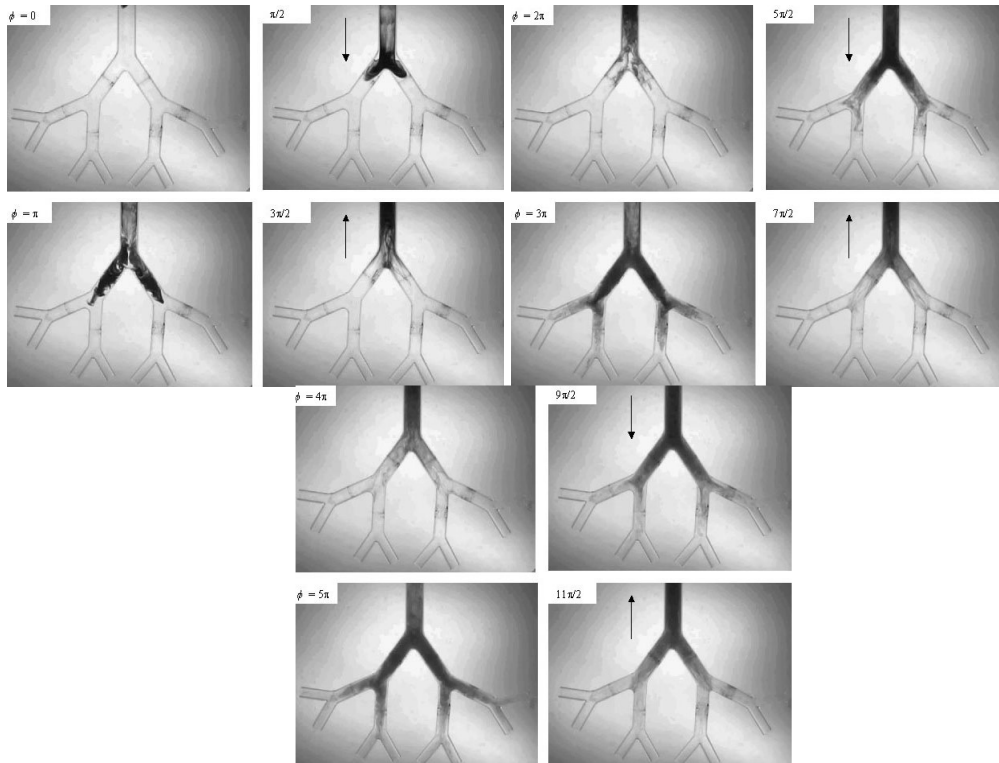


Numerické řešení šíření pasivního skaláru v proudící tekutině

Ing. Milan Smělý

1. Úvod

Tato práce si klade za cíl numericky ověřit experimentálně zjištěný vliv separace a vířivosti, které mají rozhodující podíl na axiální přenos koncentrace plynů při oscilačním proudění v centrálních dýchacích cestách (obr. 1.1). Obrázek zachycuje posloupnost tří cyklů při oscilačním proudění. V rozvětvení modelu dýchacích cest je patrné odtržení a vznik recirkulační oblasti. Ta je zdrojem vířivosti, která má rozhodující podíl na podélný přenos a umožňuje, aby se koncentrace v dalších cyklech šířila do dalších větví.



Obr.1.1 První tři cykly oscilačního proudění ve větvení v modelu dýchacích cest (experiment).
Převzato od [3].

2. Numerický model

Nestacionární rovnici s konvekcí a difúzí lze pro proměnou Φ pro dvourozměrný případ za předpokladu splnění rovnice kontinuity zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - c_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad (2.1)$$

kde $c^{x(y)}$ a $v^{x(y)}$ značí rychlosti konvekce a difuze ve směru $x(y)$.

Aplikací Crank-Nicholsonova schématu a ADI faktorizace pro časovou integraci lze výchozí rovnici převést na tvar

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} v_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} v_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi^{n+1} \\ & = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} c_x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} v_x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} c_y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} v_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi^n + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

První a druhé derivace v prostoru jsou vyjádřeny kompaktními schémata čtvrtého řádu přesnosti. Soutava je nepodmíněně stabilní, lze ji řešit s libovolným časovým krokem s druhým řádem přesnosti v čase.

3. Testovací příklad

Pro ověření přesnosti prezentované ADI metody při řešení nestacionárních problémů s konvekcí a difúzí je použit příklad šíření Gaussova pulsu ve čtvercové oblasti $[0;2] \times [0;2]$ vycházejícího z počátečních podmínek

$$\Phi(0, x, y) = \exp\left[-\frac{(x-0,5)^2}{v_x} - \frac{(y-0,5)^2}{v_y}\right], \quad (3.1)$$

který má exaktní řešení ve tvaru

$$\Phi_{\text{exakt}}(t, x, y) = \frac{1}{4t+1} \exp\left[-\frac{(x-c_x t-0,5)^2}{v_x(4t+1)} - \frac{(y-c_y t-0,5)^2}{v_y(4t+1)}\right]. \quad (3.2)$$

Dirichletovy okrajové podmínky jsou převzaty z exaktního řešení.

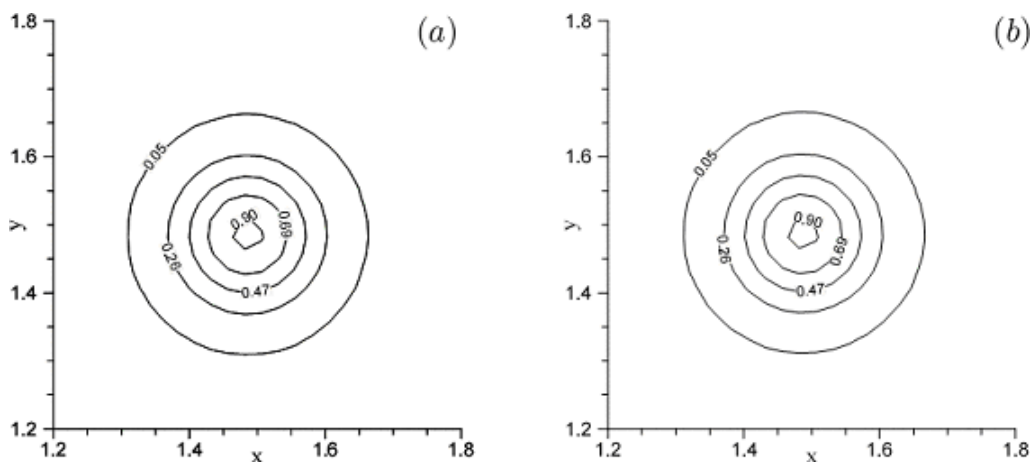
Zvolena uniformní síť $\Delta x = \Delta y = 0,025 \text{ m}$, součinitelé difúze $v_x = v_y = 0,01 \text{ m}^2/\text{s}$.

Zkoumány dva případy, $c_x = c_y = 0,8 \text{ m/s}$ a $\Delta t = 2,5 \times 10^{-3} \text{ s}$ pro $Pe = 2$ a $c_x = c_y = 80 \text{ m/s}$ a $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5} \text{ s}$ pro $Pe = 200$.

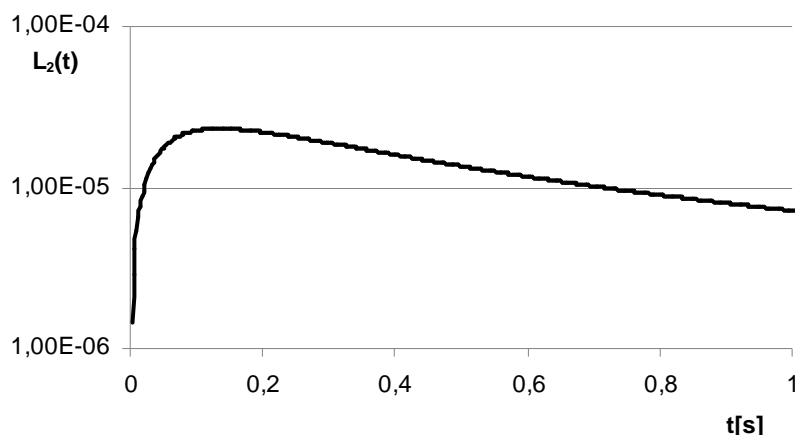
$Pe = \frac{vL}{\nu}$ značí Pécletovo číslo.

Norma chyby je vyjádřena ve formě

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=1, j=1}^{m, n} (\Phi_{i, j} - \Phi_{i, j, \text{exakt}})^2}. \quad (3.3)$$



Obr. 3.1 Srovnání exaktního řešení (a) a ADI s použitím kompaktních schémat (b) v oblasti $1,2 < x, y < 1,8$ v čase $0,0125 \text{ s}$ při $Pe = 200$.



Obr. 3.2 Vývoj chyby L_2 v čase při $Pe = 2$.

Z Obr. 3.2 je patrný proces ustalování chyby v průběhu výpočtu, což je velmi výhodné pro řešení nestacionárních problémů. Metoda nepřináší do řešení žádnou přídatnou chybu a to i při vyšších Pécletových číslech, kde oproti jiným metodám nedochází k rozmazání vlivem vysoké rychlosti konvekce, jak je ukázáno na Obr. 3.1, který zachycuje srovnání exaktního řešení a ADI metody. To znamená, že puls drží po celý průběh řešení správný tvar.

4. Model kanálu

Problém byl řešen nejprve v rovném a po rozšíření také v zakřiveném kanále. Obě řešení jsou založena na potenciálním proudění.

4.1. Rovný kanál

Pro kanál o jednotkové šířce $b = 1$ m je komplexní potenciál pro případ oscilačního hlavního proudu o frekvenci f ve směru y s potenciálním vírem v počátku souřadné soustavy vytvořen superpozicí oscilačního paralelního proudu ve směru y a potenciálního víru, vytvořeného tak, aby na stěnách kanálu byla složka rychlosti kolmá ke stěně nulová.

Výsledný komplexní potenciál je

$$F(z) = a(t) \cdot (y + ix) - i \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \ln(y + i(x - nb)), \quad (4.1)$$

kde $a(t) = A \cos(2\pi ft)$ [m/s] značí amplitudu rychlosti oscilačního proudění a $\Gamma(t)$ [m^2/s] časově proměnlivou vířivost.

Z komplexního potenciálu lze derivací odvodit rovnice pro složky rychlosti proudění

$$c_x = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right\} = \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{y}{y^2 + (x - nb)^2} \quad [m/s], \quad (4.2)$$

$$c_y = \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial F(z)}{\partial z} \right\} = a(t) - \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x - nb}{y^2 + (x - nb)^2} \quad [m/s]. \quad (4.3)$$

Na zjednodušeném modelu plic byla provedena série výpočtů pro amplitudu oscilačního proudění $A = 0,2$ m/s , frekvenci $f = 0,1$ Hz a nulovou, konstantní nebo proměnnou vířivost Γ . Součinitel difúze byl zvolen $\nu_x = \nu_y = 5 \times 10^{-5}$ m^2/s což řádově odpovídá molekulární difúzi kyslíku v dvouatomovém plynu.

Počáteční puls je rovnoměrně rozmístěn napříč kanálem ve vzdálenosti šířky kanálu od středu víru a spojitě navazuje na okolní hodnoty.

Na obrázcích plný vektor s označením 1 [m/s] ukazuje měřítko rychlosti znázorněného proudového pole.

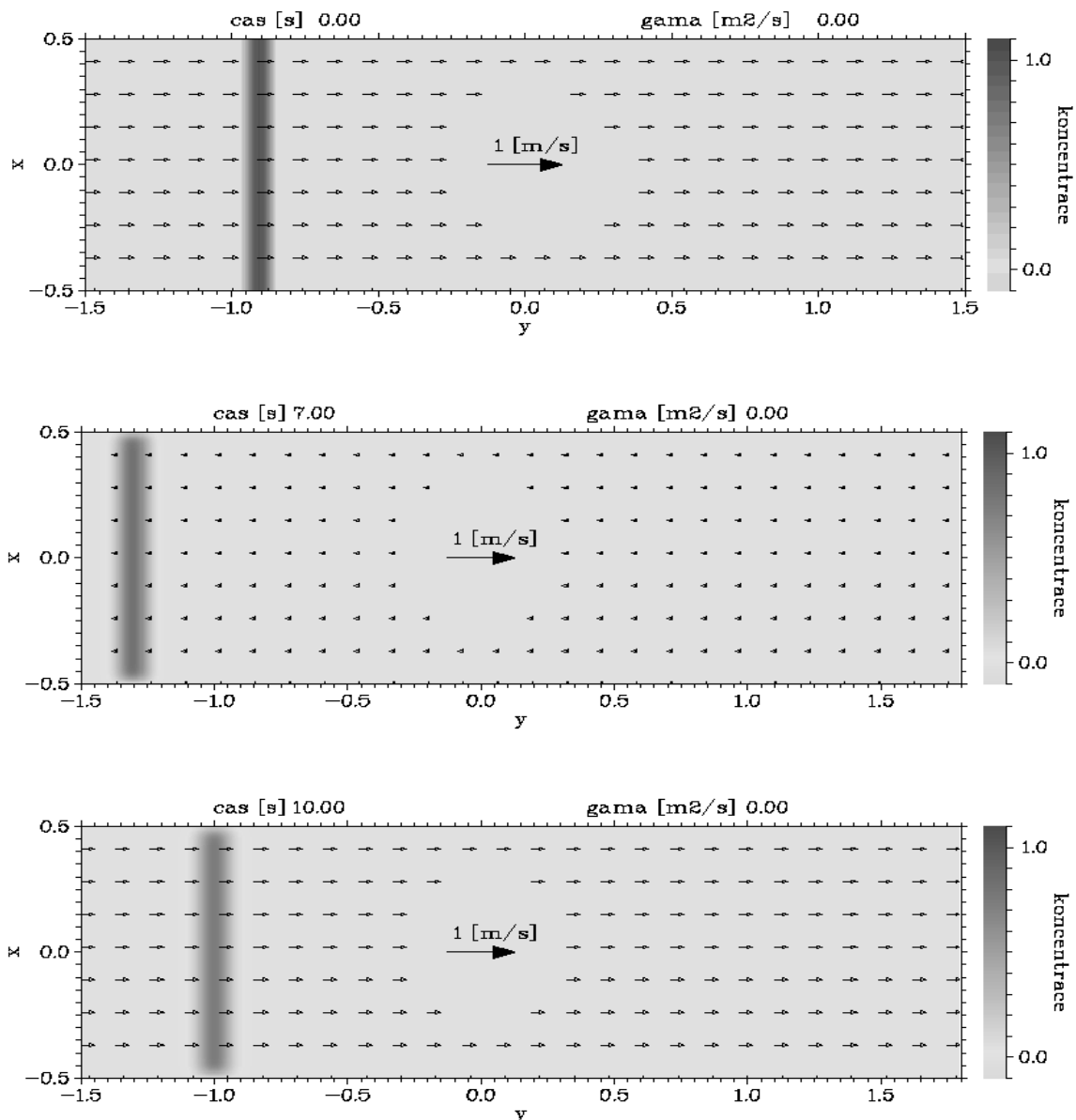
4.2. Výsledky pro rovný kanál

Výpočty byly provedeny na obdélníkové oblasti $[-0,5; 0,5] \times [-1,5; 1,8]$ rozdělené pravoúhlo uniformní sítí po krocích $dx = dy = 0,005$ m na $(n = 201) \times (m = 661)$ bodů. Tento rozsah dobře umožňuje sledovat časový vývoj dominantní části pulsu.

Na horní a dolní stěně kanálu jsou předepsány Dirichletovy okrajové podmínky nastavené na nulovou hodnotu, hmota nesmí procházet stěnami. Na levém a pravém konci jsou předepsány Neumanovy okrajové podmínky nastavené na nulovou hodnotu první derivace, které hmotě umožňují volné opuštění oblasti.

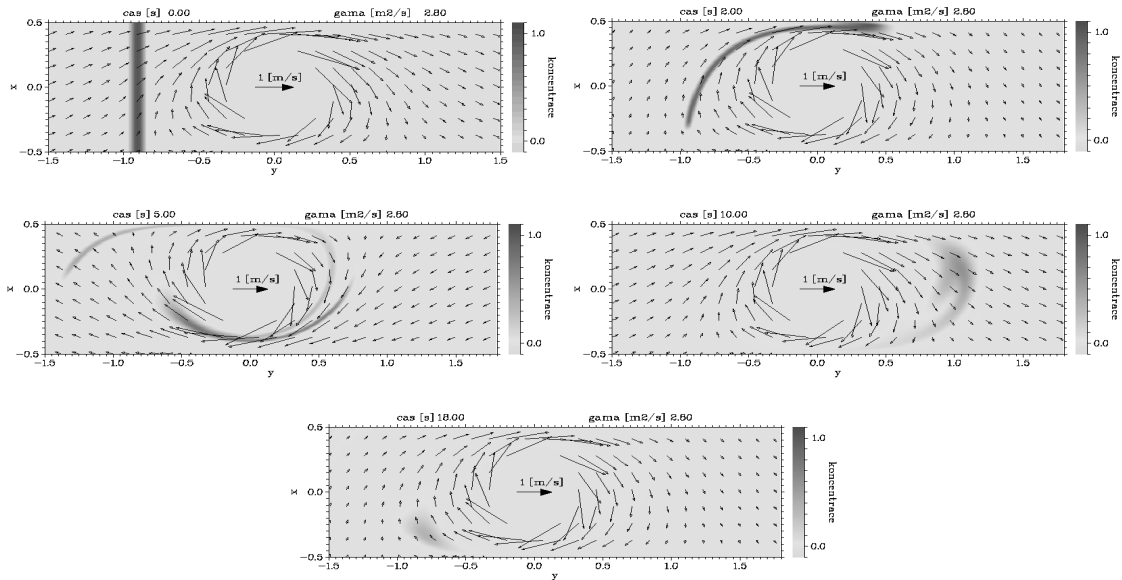
Obr. 4.2.1 zachycuje posloupnost řešení pouze oscilačního proudění s nulovou vířivostí Γ .

Vyplývá z něho minimální přenos hmoty podél kanálu. Puls se po uplynutí doby periody 10 s vrátí zpět do výchozí pozice. Je patrné postupné rozptylování pulsu vlivem difúze.



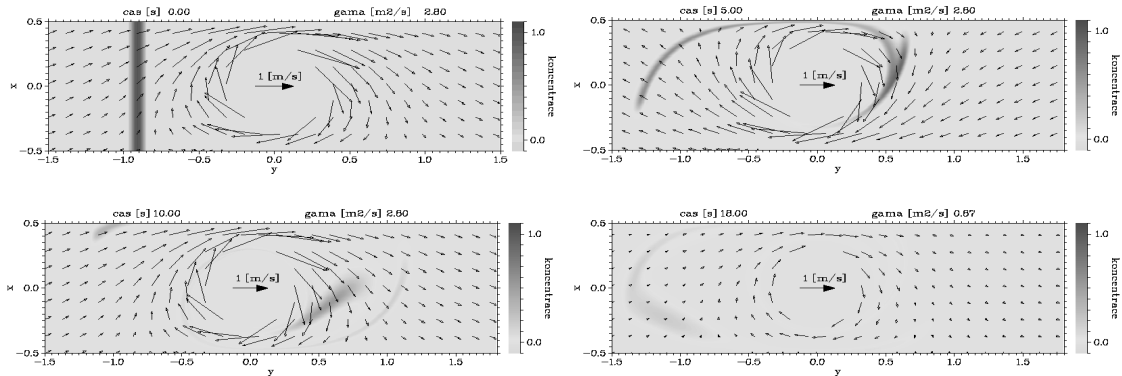
Obr 4.2.1 Řešení s nulovou vířivostí v časech 0 až 10 s.

Obr. 4.2.2 zachycuje sekvenci řešení při konstantní vířivosti $\Gamma = 2,8 \text{ m/s}^2$ po dobu dvou period, 20 s. Singularita ve středu víru byla nahrazena spojitým jádrem, které nijak neovlivní přesnost řešení, protože puls se k němu v žádném čase nepřiblíží. Na obrázcích není jádro víru zobrazeno z důvodu větší přehlednosti. Z časového průběhu je patrný posun hmoty vlivem urychlení částic v horní a dolní části kanálu. Po uplynutí první periody se puls přesune na stranu napravo od víru, tedy na opačnou stranu než byla výchozí pozice a po další periodě se puls přesune zpět na levou stranu od víru, dále než byla výchozí poloha. Hmota se v tomto případě pohybuje v rámci celé oblasti narozdíl od oscilačního proudění bez vířivosti, kdy se pohybuje stále na stejném místě.



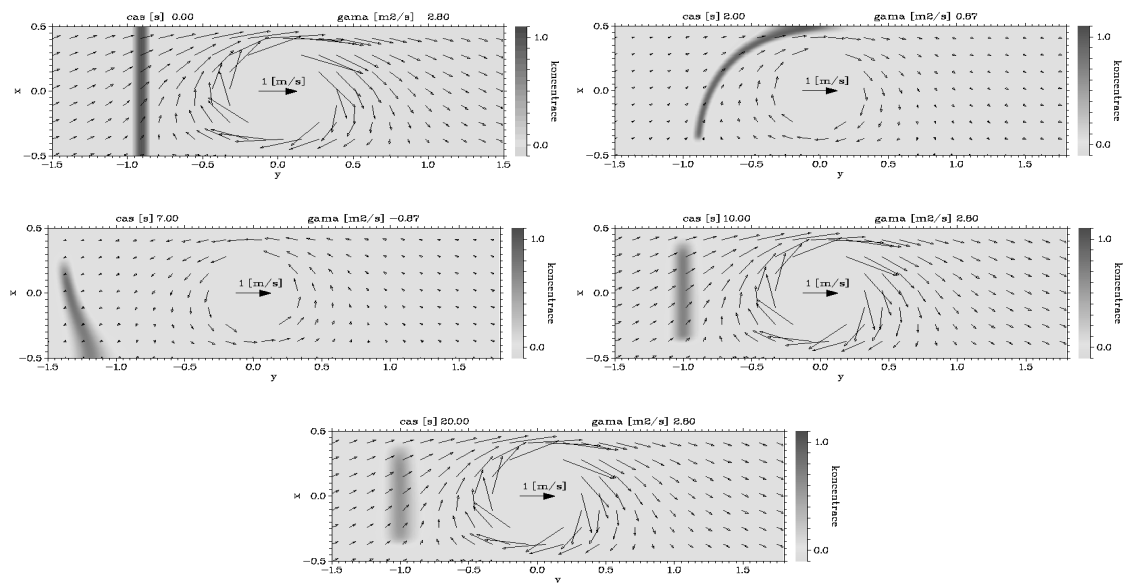
Obr. 4.2.2 Řešení s vířivostí $\Gamma = 2,8 \text{ m/s}^2$ v časech 0 až 20 s.

Obr. 4.2.3 zachycuje řešení s proměnnou vířivostí $\Gamma(t) = |2,8 \cos(2\pi ft)|$ klesající a stoupající v závislosti na axiální rychlosti proudění po dobu 20s. Podobně jako v předchozím případě zde dochází k posunu hmoty vlivem vířivosti a pohybuje se v rámci celé oblasti.



Obr. 4.2.3 Řešení s vířivostí $\Gamma = |2,8 \cos(2\pi ft)|$ v časech 0 až 20 s.

Obr. 4.2.4 zachycuje sekvenci s proměnnou vířivostí $\Gamma(t) = 2,8 \cos(2\pi ft)$ klesající a stoupající v závislosti na axiální rychlosti proudění a zároveň měnící se změnou směru rychlosti i smysl otáčení víru po dobu dvou period. Hmota se v tomto případě sice posouvá výrazněji podél kanálu, ale z důvodu změny směru rychlosti proudění na opačnou stranu se po uplynutí doby periody vrátí zpět na výchozí pozici a stejně pak po uplynutí druhé a třetí periody. V tomto případě se jedná pouze o jiný druh oscilačního proudění.



Obr. 4.2.4 Řešení s vířivostí $\Gamma = 2,8 \cos(2\pi ft)$ v časech 0 až 20 s.

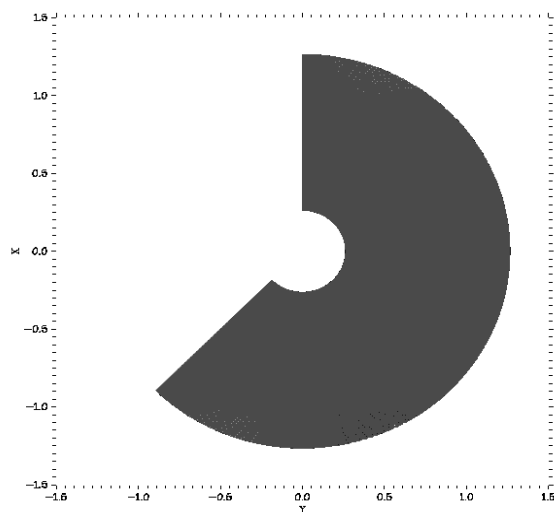
4.4. Zakřivený kanál

Aby nebylo řešení omezeno jen na pravoúhlé oblasti, je výhodné vytvářet křivočaré sítě v globálním souřadném systému x,y , které lze jednoduchou úpravou převést na pravoúhlé souřadnice ξ,η a řešit obdobně jako původní problém.

Strukturovanou síť lze podle [4] vytvořit například pomocí eliptických Winslowových rovnic a výchozí rovnici s konvekcí a difúzí (1.1) pak s pomocí transformací upravit na tvar, který lze řešit podobně jako původní soustavu.

4.5. Výsledky v zakřiveném kanálu

Výpočet byl proveden na jednoduchém kruhově zakřiveném kanále, na kterém je možno síť exaktně vyjádřit. Poloměry zakřivení byly zvoleny tak, aby mohl být výsledek porovnán s rovným kanálem $3 \times 1 \text{ m}$. Jednotlivé body sítě jsou pak body ležící na kružnicích. Na Obr. 4.5.1 je zobrazena síť v souřadnicích x, y tvořená 201×601 body.



Obr. 4.5.1 Zakřivený kanál v souřadnicích x,y .

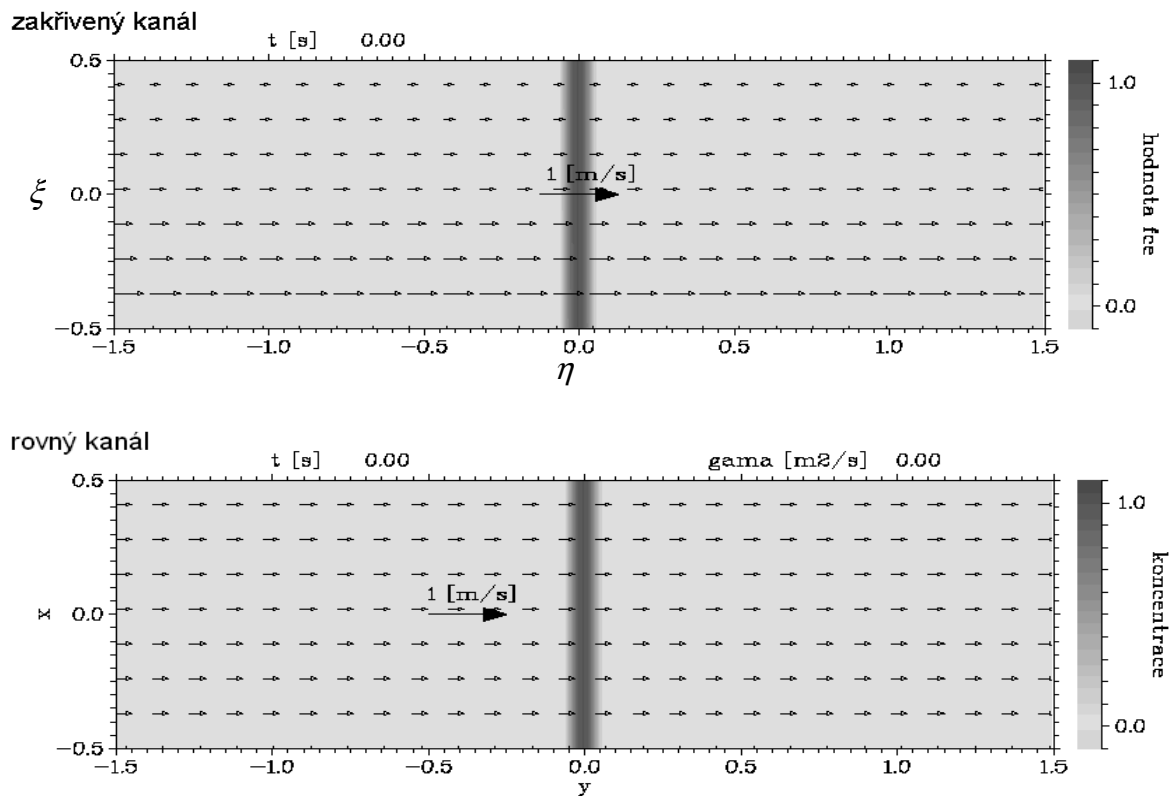
Proudové pole v kanále je tvořeno oscilujícím potenciálním vírem se středem v počátku, pro který lze jednoduše vyjádřit tečné rychlosti

$$v_t(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos(2\pi ft), \quad (4.5.1)$$

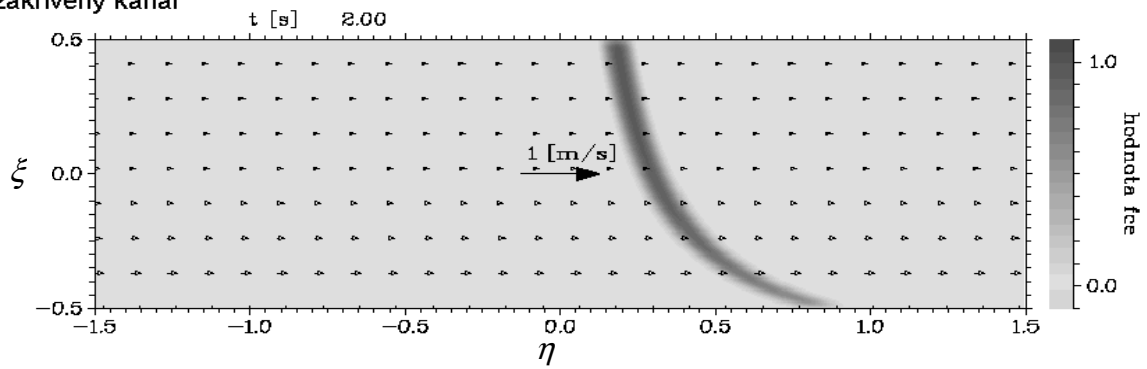
kde vířivost $\Gamma = \frac{1,2}{\pi} \text{ m}^2/\text{s}$ je navržena tak, aby se rychlost na středním poloměru rovnala rychlosti oscilačního proudu v rovném kanále. Frekvence $f = 0,1 \text{ Hz}$. Součinitel difúze $\nu = \nu_x = \nu_y = 5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Pro možnost porovnání a lepší přehlednost jsou výsledky zobrazeny v souřadném systému ξ, η .

Obr. 4.5.2 zachycuje srovnání výsledků v zakřiveném a rovném kanále po dobu jedné periody 10 s. V zakřiveném kanále dochází vlivem vířivosti k výraznějšímu posunu hmoty oproti pouhému oscilačnímu proudění v rovném kanále, ale v obou případech se na konci každé periody vrátí puls do počáteční polohy.

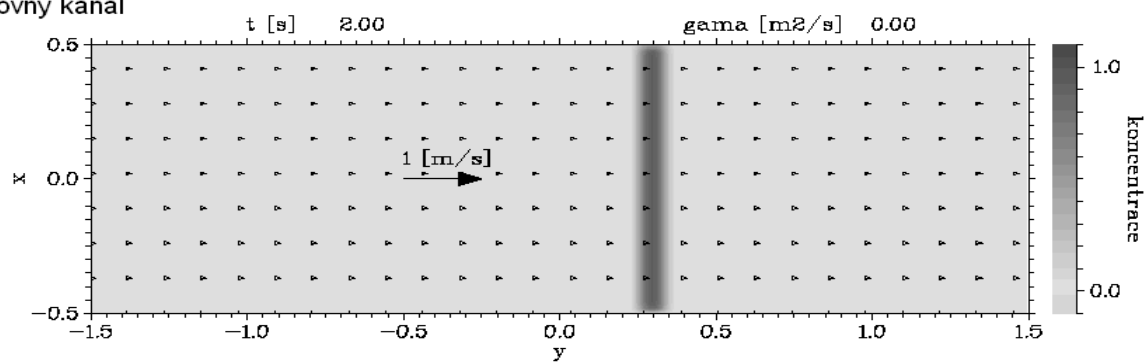
Z toho plyne, že i pouhé zakřivení může napomoci podélnému šíření pasivního skaláru.



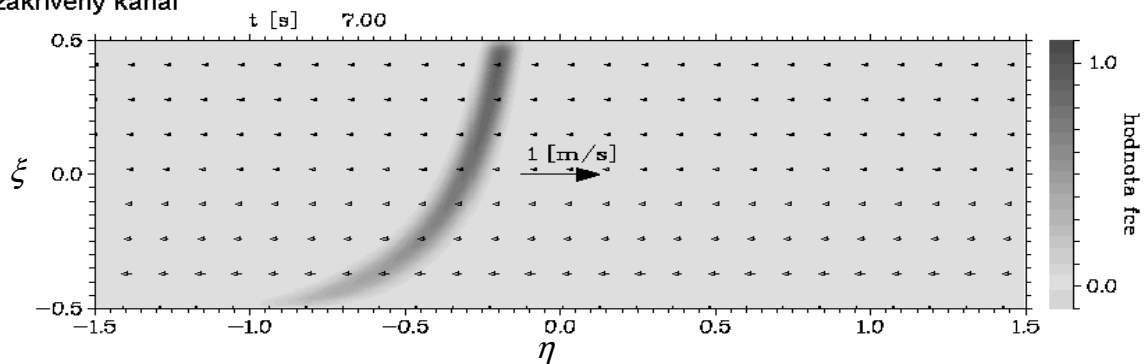
zakřivený kanál



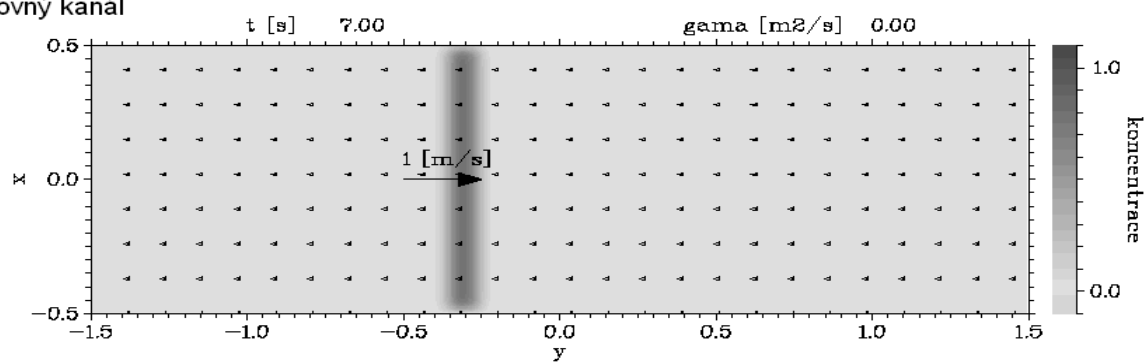
rovný kanál

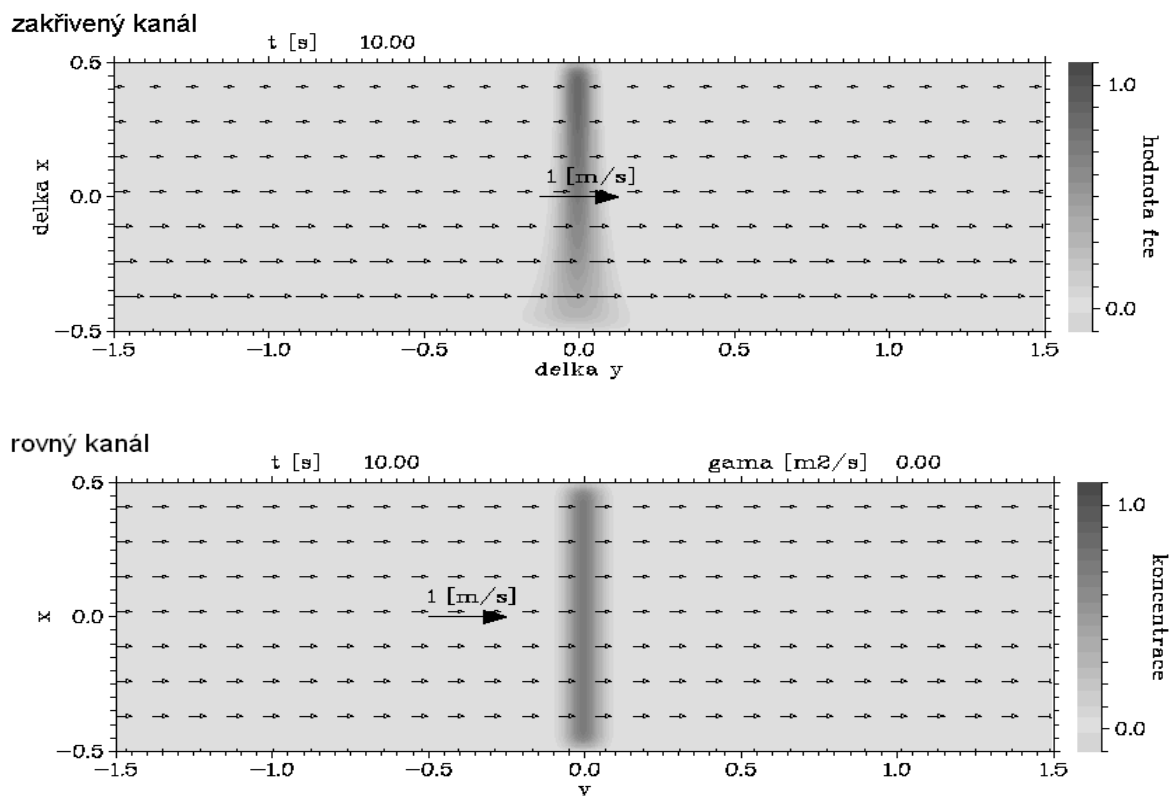


zakřivený kanál



rovný kanál





Obr. 4.5.2 Srovnání řešení v rovném a zakřiveném kanále pro časy 0 až 10 s.

5 Závěr

Nejprve byly provedeny čtyři výpočty na rovném rovinném modelu kanálu plic. Celý výpočet byl připraven a naprogramován v jazyce C pomocí ADI metody a kompaktních schémat. Ze srovnání výsledků plyne jasné zlepšení při podélném přenosu pasivního skaláru v případech, v nichž se vířivost vyskytuje, oproti těm, kde je pouhé oscilační proudění.

Na Obr. 4.2.1 s nulovou vířivostí se puls pohybuje jen v oblasti $\pm 0,2$ m kolem výchozí polohy, což je plně v souladu s teoretickým předpokladem délky dráhy získané integrací rychlosti. Za hranice těchto mezí se koncentrace šíří jen pozvolna vlivem difúze.

Na Obr. 4.2.3 a Obr. 4.2.4, kde je konstantní nebo proměnná hodnota vířivosti, dochází oproti pouhému oscilačnímu proudění ke zdatelnému posunu pulsu za dobu jedné periody, což umožní v dalších cyklech posunutí až k protilehlé straně zobrazované oblasti a tedy k výraznému zlepšení podélného přenosu hmoty v obou směrech.

Dále byl proveden výpočet na zakřiveném kanálu, který rovněž prokázal zlepšení podélného přenosu oproti rovnému kanálu s pouhým oscilačním prouděním jak je ukázáno na Obr. 4.5.2. Podařilo se tedy na elementárních případech prokázat vliv vířivosti na podélný přenos pasivního skaláru. Dosažené výsledky jsou v souladu s předpoklady i experimentem a mohou se stát výchozím materiálem pro další výzkum na složitějších případech, které nepovedou k pouhému dokazování vlivu vířivosti ale i k většímu přiblížení ke skutečnosti a kvantifikaci tohoto jevu.

6. Seznam použité literatury

- [1] You D.: *A High Order Padé ADI Method for Unsteady Convection-Diffusion Equations*, Center for Turbulence Research, Stanford, 2005
- [2] Moin P.: *Fundamentals of Engineering Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [3] Vališová K., Knob M., Adamec J.: Vliv vířivosti na přenos pasivního skaláru v oscilačním proudění, Colloquium FLUID DYNAMICS 2005, Praha, 2005
- [4] Farrashkhalvat M., Miles J.P.: *Basic Structured Grid Generation*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2003
- [5] Dvořák R., Kozel K.: *Matematické modelování v aerodynamice*, Nakladatelství ČVUT, Praha, 1996