

Teoretické stanovení úhlové rychlosti Segnerova kola

David Vodička

Vedoucí práce: prof. Ing. Pavel Šafařík, CSc.

ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav mechaniky tekutin a termodynamiky, Technická 4, 166 07 Praha 6, Česká republika

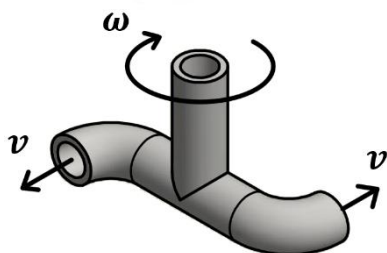
Abstrakt

Článek se zabývá dynamikou Segnerova kola. V první části je uveden postup výroby kola, a to použití jednoduchých dílů a jejich spojením a technologie 3D tisku. Následuje odvození rovnice pro stanovení úhlových otáček a aplikování tohoto vztahu na dva různé případy provozu. Proudění je uvažováno jako jednorozměrné.

Klíčová slova: Segnerovo kolo, dynamika těles, proudění kapaliny

1. Úvod

Segnerovo kolo sestává ze dvou částí, pevné a rotační. Obě části se skládají z trubek. Pevná část je připevněna k nádrži s vodou, rotační část je pak připevněna pomocí ložiska k pevné části. Rotační část má specifický tvar, trubka se rozděluje na dvě stejné části – nazývaná ramena (obr. 1), kdy konce těchto ramen míří na opačné strany. Ramen může být více. Princip těchto strojů však není omezen jen na vodu. Pokud stroj upevníme k rámu a k pevné části přivedeme hadici se stlačeným vzduchem, stroj bude taktéž uveden do pohybu. Příkladem je Segnerovo kolo připevněné k nafukovací pumpičce. Při stlačení pumpičky je vzduch vháněn do Segnerova kola a proud vzduchu v ramenu vytváří točivý moment stejně jako voda.



Obr. 1. Rotační část s vyznačenými rychlostmi výtoku tekutiny

2. Konstrukce

Výroba takového zařízení může být provedena více způsoby. Jako prototyp bylo kolo vyrobeno z částí trubek, kolen a velkého ložiska. Model obsahoval řadu napojení a rotační část nebyla dostatečně souosá. To pak ovlivňovalo chod kola. Pro zvýšení souososti byla zvolena technologie 3D tisku. Model

byl navrhnut tak, aby se do něj dala umístit dvě ložiska, která zajistí osové vedení rotační části. Zároveň se snížil počet potřebných součástí oproti prototypu.

Nevýhodou rotační části je absence větší rovné plochy, od které by tisk mohl začít. Pro vytvoření kvalitního modelu je nutné tisknout současně s modelem i podpěry, ty se po dokončení modelu odstraní. Podpěry jsou buďto ze stejného materiálu a musí se z modelu odřezat, nebo jsou z vodorozpustného materiálu. Model se po dokončení ponoří do vody, podpěry se rozpustí a model je hotový. Tato technologie je však drahá. Levnější a rychlejší řešení bylo použít topenářské trubky. Pro rotační část byly použity rovné trubky, T spojka a dvě kolena, která změni směr proudění tak, aby voda vytékala kolmo na osu ramene.

Další problém pak představuje těsnění. Při zkoušce prvního modelu nebylo použito žádné těsnění a ztráty vody do okolí přes ložisko byly zanedbatelné. Úniku vody se dá výrazně zamezit použitím gufera.

3. Pohybová rovnice

Dynamika tuhého tělesa, které vykonává rotační pohyb, je popsána Eulerovými rovnicemi (1). Pokud těleso rotuje pouze kolem jedné osy, Eulerovy dynamické rovnice se značně zjednoduší, zůstane totiž jen jedna. Pro dynamiku Segnerova kola tedy platí, že moment setrvačnosti kola kolem osy rotace, vynásobený úhlovým zrychlením, je roven součtu všech působících momentů na toto těleso [1]. Jestliže neuvažujeme ztráty v ložisku, působí na kolo moment vyvozený vytékající vodou a Coriolisův moment.

$$I\alpha + \omega \times I\omega = \sum_i M_i \quad (1)$$

3.1. Coriolisův moment

Moment, který protékající kapalina vytváří na stěnu kola v důsledku rotačního pohybu je nutné odvodit. Na kapalinu působí Coriolisovo zrychlení, které má tvar

$$a_c = 2\omega \times v. \quad (2)$$

Velikost zrychlení vyjádříme jako součin velikostí obou vektorů vynásobené sinem úhlu, který svírají. V tomto případě jsou na sebe vektory kolmé, jak je patrné z (obr. 2) a tedy velikost Coriolisova zrychlení je

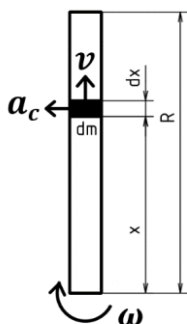
$$a_c = 2\omega v. \quad (3)$$

Na elementární část kapaliny působí elementární moment

$$dM_c = 2x\omega v dm = 2x\omega v \rho A_1 dx. \quad (4)$$

Po integraci dostáváme výsledný Coriolisův moment, který působí na proudící tekutinu

$$M_c = \rho A_1 v \omega R^2. \quad (5)$$



Obr. 2. Odvození Coriolisova momentu

3.2. Úhlová rychlost

Pokud nebereme v úvahu ztráty v ložisku, pohybová rovnice má tvar

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_t - M_c. \quad (6)$$

M_t je moment, který vytváří vytékající kapalina.

$$M_t = \rho A_1 v R v. \quad (7)$$

Dosažením rovnic (5) a (7) do (6) získáme diferenciální rovnici pro úhlovou rychlost

$$I \frac{d\omega}{dt} = \rho A_1 v R (v - \omega R). \quad (8)$$

Vyřešením této rovnice získáme závislost úhlové rychlosti na čase

$$\omega = \frac{v}{R} \left(1 - e^{-\frac{\rho A_1 v R^2}{I} t} \right). \quad (9)$$

Z rovnice vidíme, že otáčky závisí nejen na čase, ale i na délce ramen, rychlosti vytékající kapaliny, vnitřním průřezu v ramenou a momentu setrvačnosti. Délka ramen, hustota kapaliny, vnitřní průřez a moment setrvačnosti jsou dány konstrukcí modelu. Pro číselné řešení je tedy nutné znát rychlost, kterou kapalina vytéká.

3.3. Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti lze zjistit dvěma způsoby. Zaprvé je to pomocí integrálního počtu, zadruhé pak měřením. Rotující soustavu můžeme rozdělit na dvě pomyslné části. První část je moment setrvačnosti ramen, druhá moment setrvačnosti proudící vody. dílčí momenty budu počítat k ose z (obr. 3), integrál má tvar

$$I = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV. \quad (10)$$

Pro vodorovné části volím válcový souřadnicový systém.

$$\begin{aligned} x &= w \\ y &= r \sin \phi \\ z &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti od trubek

$$I_1 = \rho_t \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} (w^2 + r^2 \sin^2 \phi) r dr d\phi dw \quad (11)$$

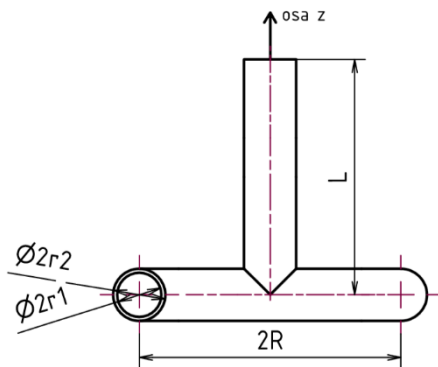
$$I_1 = \rho_t \pi R \left(\frac{2R^2(r_2^2 - r_1^2)}{3} + \frac{r_2^4 - r_1^4}{4} \right). \quad (12)$$

Moment setrvačnosti od proudící vody

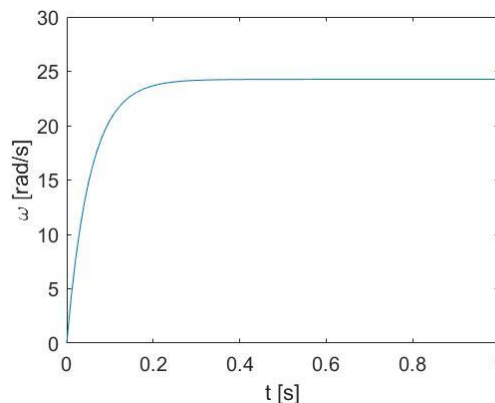
$$I_2 = \rho_v \int_{-R}^R \int_0^{2\pi} \int_0^{r_1} (w^2 + r^2 \sin^2 \phi) r dr d\phi dw \quad (13)$$

$$I_2 = \rho_v \pi R \left(\frac{2R^2 r_1^2}{3} + \frac{r_1^4}{4} \right). \quad (14)$$

Celkový moment I setrvačnosti kola je součtem těchto dvou momentů. Integrační meze použité ve výpočtech jsou znázorněny na (obr. 3).



Obr. 3. Rozměry rotační části ke stanovení momentu setrvačnosti



Obr. 4. Graf závislosti úhlové rychlosti na čase

4. Aplikace pohybové rovnice

Ve vzorci pro úhlové zrychlení (9) vystupuje kromě času ještě rychlost vytékající kapaliny. Za předpokladu, že vnitřní průřez v ramenu je mnohonásobně menší než plocha hladiny v nádobě, stanovíme velikost rychlosti pomocí Torricelliho vzorce

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (15)$$

4.1. Stálá výška

Nejjednodušší přechodový děj získáme tak, že budeme do nádoby přilévat vody a tím udržovat stálou výšku hladiny. Po dosazení (15) do (9) bude rovnice pro úhlovou rychlost obsahovat jedinou neznámou, a to čas. Hodnotu konstantních otáček získáme tak, že pro rovnici (9) spočítáme limitu pro čas jdoucí do nekonečna.

$$\omega_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2gh}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R^2 \rho A_1 \sqrt{2gh}}{I} t} \right) \quad (16)$$

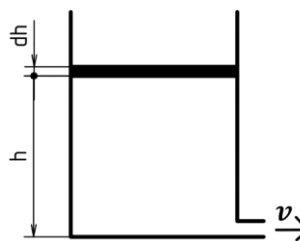
$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{R} \quad (17)$$

Tento vztah je velmi podobný známému vzorci z kinematiky. Pro hmotný bod platí, že součin úhlové rychlosti a poloměru křivosti je roven normálové složce rychlosti. Pro případ Segnerova kola vyšlo, že součin úhlové rychlosti v ustáleném ději a délky ramen se rovná rychlosti výtoku vody z ramen.

Závislost úhlové rychlosti je vykreslena na (obr. 4). Parametry kola jsou $R = 0,1m$, $r_1 = 0,007m$, $r_2 = 0,01m$, $H = 0,3m$, $\rho_t = 905 \frac{kg}{m^3}$, $\rho_v = 997 \frac{kg}{m^3}$.

4.2. Vypouštění nádoby

Nádobu naplníme vodou do výšky H , otevřeme a necháme vytékat přes Segnerovo kolo. Na rozdíl od předešlého příkladu se bude výška hladiny měnit [2].



Obr. 5. Odvození rychlosti poklesu hladiny

Pro rychlost poklesu hladiny platí

$$v_1 = \frac{dh}{dt}. \quad (18)$$

Zároveň použijeme rovnici kontinuity

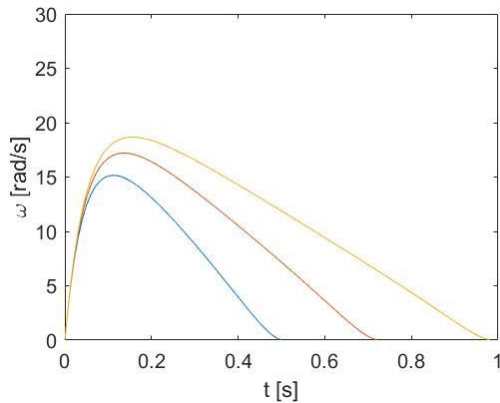
$$v_1 A_1 = v A_2. \quad (19)$$

Dosazením (18) do (19) získáme diferenciální rovnici pro výšku hladiny

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{2gh}. \quad (20)$$

Řešením této rovnice dostaneme průběh výšky hladiny v závislosti na čase (21).

$$h = \left(\sqrt{H} - t \frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2}} \right)^2 \quad (21)$$



Obr. 6. Graf závislosti úhlové rychlosti na čase

Na (obr. 6) je vidět graf úhlové rychlosti pro stejné podmínky jako měla úloha se stálou výškou hladiny. Zde je nutné ještě uvést rozměr nádoby. Křivky počínají od nejvyšší odpovídající poloměru nádoby $r_3 = 0,014\text{m}$, resp. $0,012\text{m}$, $0,01\text{m}$.

5. Závěr

Tato práce měla za úkol zpracovat teorii potřebnou k popisu dynamiky Segnerova kola. Dále bude následovat experimentální měření reálného průběhu úhlové rychlosti na vyrobeném Segnerově kole. Dále bude teorie doplněna o rozbor třetího momentu, jeho velikost a vliv na dynamiku Segnerova kola. Jelikož skutečný model není shodný s geometrickým modelem, též moment setrvačnosti bude určen experimentálně.

Poděkování

Děkuji panu profesorovi Pavlu Šafaříkovi za odborné konzultace k výše popsanému problému.

Seznam symbolů

ω	úhlová rychlost kola ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
v	rychlost kapaliny na výstupu ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$)
a_c	Coriolisovo zrychlení ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)
M_c	Coriolisův moment ($\text{N}\cdot\text{m}$)
M_t	moment od vytékající kapaliny ($\text{N}\cdot\text{m}$)
I	celkový moment setrvačnosti ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
g	tíhové zrychlení ($\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$)
H	celková výška (m)
h	výška vody v nádobě (m)
ρ_t	hustota materiálu Segnerova kola ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
ρ_v	hustota proudící vody ($\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$)
A_1	vnitřní průřez trubek (m^2)
A_2	plocha vodní hladiny v nádobě (m^2)
R	délka ramene (m)
r_1	vnitřní poloměr trubek (m)
r_2	vnější poloměr trubek (m)

Literatura

- [1] VALÁŠEK, M., Z. ŠIKA a V. BAUMA. Mechanika B. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004. ISBN 80-01-02919-0.
- [2] JEŽEK, J., B. VÁRADIOVÁ a J. ADAMEC. Mechanika tekutin. 3. vydání, ČVUT, Praha 2000. ISBN 80-01-01615-3.