

Popis kmitání vibrační třídičky s více stupni volnosti pomocí numerických metod

Bc. Oskar Turek, Ing. Jan Hoidekr

ČVUT v Praze, Fakulta strojní, Ústav konstruování a částí strojů, Technická 4, 166 07 Praha 6, Česká republika

Abstrakt

Studie provedená v rámci této práce se zabývá kmitáním vibrační třídičky olejnatých semen a jeho matematickým popisem. Třídička je uložena na čtyřech pružinách a buzena harmonickou kmitající silou. Daná prostorová úloha se převedla pouze na rovinnou pro jednodušší popis chování třídičky. Po sestavení rovnic bylo nutné použít výpočtový software, který by dané rovnice vyřešil a byl schopen vykreslit dané pohyby zvolených bodů a natočení třídičky. Tyto vypočtené výsledky poté poslouží k porovnání se skutečným kmitáním celé sestavy, které je zaznamenáno na video a vyhodnoceno. Díky tomuto porovnání lze říci, jak přesný je výpočtový model vůči reálnému kmitání.

Klíčová slova: Kmitání s n° volnosti; vibrační třídička; MATLAB; diferenciální algebraické rovnice

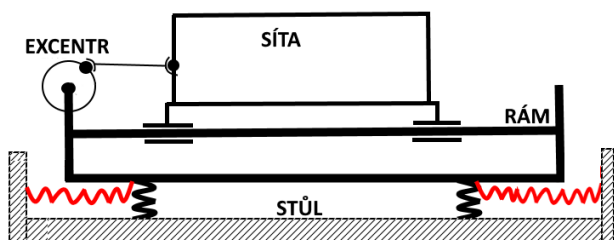
1. Úvod

Vibrační třídička olejnatých semen je používána k třídění frakcí semen a slupek o různých velikostech. K tomu se používá několika sít umístěných nad sebou (v tomto případě jsou síta čtyři). Pohyb semen a slupek po sítěch je realizován pomocí excentrického pohonu od elektro motoru, který je sám umístěn na rámu třídičky (viz obr. 1). Tím je vyvoláno kmitání sestavy v příčném směru a také pohyb a propad semen a slupek. Celá sestava je uložena na čtyřech pružinách, které tento pohyb umožňují. Původně bylo použito čtyř silent-bloků, které ale neměli lineární průběh tuhosti a proto byly použity pružiny, které se při osovém zatížení chovají lineárně.

2. Model

2.1. Nahrazení soustavy

Pro provedení výpočtů bylo nutné soustavu zjednodušit z trojrozměrné úlohy na dvourozměrnou. Zároveň se pro snazší orientaci a mírné zjednodušení výpočtů nahradili v modelu dvě pružiny čtyřmi, přičemž se uvažuje, že svislé kmitají pouze v ose x a vodorovné (červeně obr. 1) pouze v ose y . Na tělese rámu je také vyznačen bod, který bude sledován a popisován jeho pohyb (černý křížek na obrázku 2). Tento bod bude také sloužit pro záznam videa a jeho vyhodnocení.

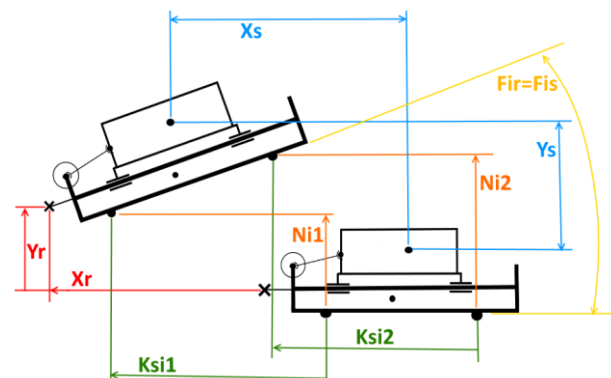


Obrázek 1: Model soustavy

2.2. Obecná poloha

Soustavu bylo potřeba nakreslit v obecné poloze, kde se vyznačily důležité a pro výpočet nezbytné rozměry a souřadnice. Na obrázku 2 je naznačena soustava v této poloze.

Červeně (X_r, Y_r) jsou souřadnice posunu referenčního bodu rámu do x -ové a y -ové souřadnice. Zeleně (K_{s1}) a oranžově (N_i) jsou vyznačeny deformace pružin vůči stolu. Modře (X_s, Y_s) je vyznačen posuv sít do obou souřadnic. Žlutý (F_{ir}, F_{is}) je pak úhel natočení rámu třídičky a síta. Z tohoto vyplývá, že je celkem 9 parametrů, které je potřeba popsat.

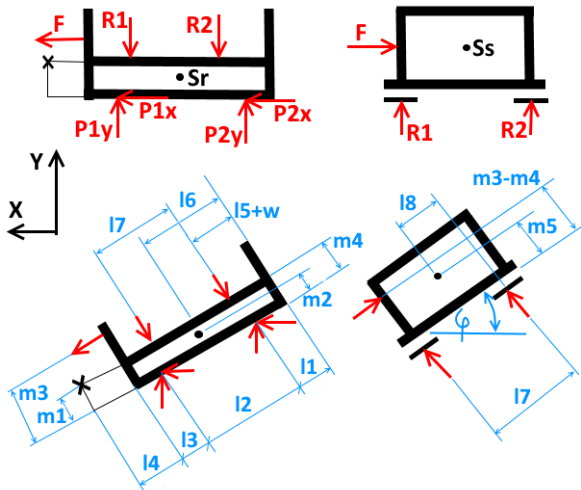


Obrázek 2: Obecná poloha

2.3. Uvolnění těles a zavedení rozměrů

Po zvolení obecné polohy bylo možné tělesa soustavy uvolnit a zavést konstantní rozměry a také vyznačit všechny silové účinky na tělesa působící. Z těchto uvolnění lze pak sestavit pohybové rovnice pro řešení. Na obrázku 3 jsou obě tělesa uvolněna v obecné poloze. Soustava dvou těles v rovině má obecně 6° volnosti. Tato úloha má 4° - X_r, Y_r, F_{ir} a X_s .

* Kontakt na autora: oskar.turek@fs.cvut.cz

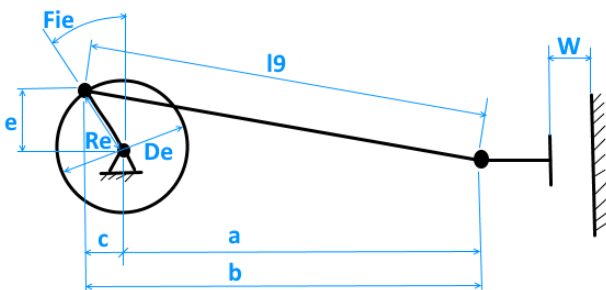


Obrázek 3: Uvolnění těles

Některé rozměry (např. l6 nebo m5) bylo nutné získat z 3D modelu. Jedná se především o polohy těžišť či momenty setrvačnosti.

2.4. Vyjádření úhlové rychlosti excentru

Pro výpočet je potřeba zavést úhlovou rychlost excentru, která se bude vyskytovat v rovnicích. Vychází se z geometrie excentrického pohonu (obr. 4).



Obr. 4: Geometrie excentru

$$c = r_e * \sin \varphi_e \quad (1)$$

$$l_9^2 = b^2 + e^2 \quad (2)$$

$$b = \sqrt{l_9^2 - e^2} = \sqrt{l_9^2 - (r_e * \cos \varphi_e)^2} \quad (3)$$

$$a = \sqrt{l_9^2 - (r_e * \cos \varphi_e)^2} - r_e * \sin \varphi_e \quad (4)$$

$$W = \sqrt{l_9^2 - r_e^2} - \sqrt{l_9^2 - (r_e * \cos(\omega * t))^2} + r_e * \sin(\omega * t) \quad (5)$$

Díky tomu je k dispozici popis úhlové rychlosti v závislosti na rychlosti motoru a na čase (rovnice 5). Tato rovnice se zavede jako pomocná, jelikož nevyjadřuje neznámé proměnné.

3. Sestavení rovnic

3.1. Vyjádření příčné tuhosti pružin

Jelikož osová tuhost použitých pružin není známa, bylo potřeba tuto spočítat pomocí vzorce

$$k = \frac{G * d^4}{8 * i * D^3} \quad (6)[1]$$

kde G je modul pružnosti ve smyku (ocel = $7,9 * 10^{10}$ N/m), d je průměr drátu pružiny ($d = 4$ mm), i je počet činných závitů ($i = 3$) a D je střední průměr vinutí ($D = 36$ mm). Volná délka pružiny, která bude použita dále, $l_0 = 49$ mm.

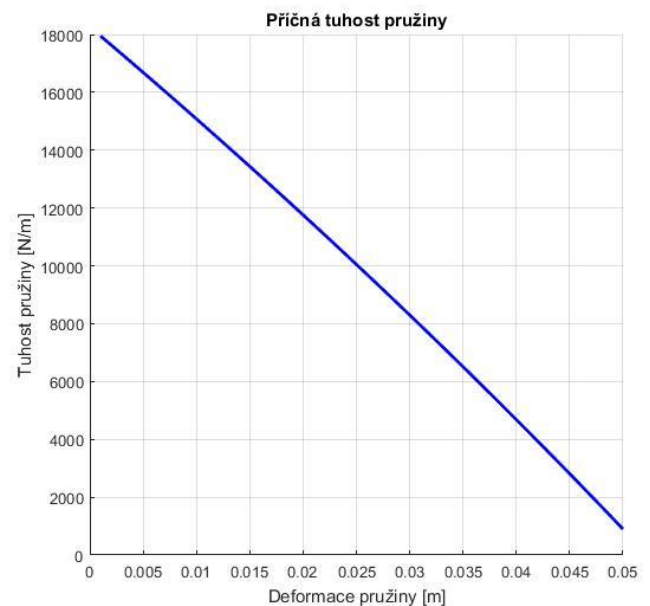
Výsledná osová tuhost vyšla přibližně $k_y = 18$ N/mm. Tento výsledek byl ověřen také experimentálně pomocí závaží a měření stlačení.

Tuhost příčná je funkcí tuhosti osově podle vzorce

$$\frac{k_p}{k} = \frac{2,6}{(1+K) * \tan \theta / \theta - K} \quad (7)[1]$$

kde $K = 2,6/\alpha$; $\alpha = y/l_0$; $\theta = (\beta(5,98\alpha + 2,3\alpha^2)^{1/2})/2,6$; $\beta = l_0/D$.

Z rovnice 7 také plyne závislost na osovém stlačení y . Graf příčné tuhosti je na obrázku 5.



Obr. 5: Graf příčné tuhosti pružin

3.2. Pohybové rovnice

Z uvolnění (obr. 3) lze sestavit pohybové rovnice pro každé těleso zvlášť, kdy se sestaví Newton-Eulerovy rovnice typu $m * a = \sum F$. Pro každé těleso budou tedy 3 rovnice – pro směr X , směr Y , a natočení φ .

Rovnice pro rám:

$$m_R * \ddot{X}_R = F * \cos \varphi_R - R_1 * \sin \varphi_R - R_2 * \sin \varphi_R + P_{1X} + P_{2X} \quad (8)$$

$$m_R * \ddot{Y}_R = -F * \sin \varphi_R - R_1 * \cos \varphi_R - R_2 * \cos \varphi_R + P_{1Y} + P_{2Y} - Gr \quad (9)$$

$$I_R * \ddot{\varphi}_R = F * (m_3 - m_2) - P_{1Y} * \cos \varphi_R * (l_1 + l_2 - l_6) - P_{1X} * \sin \varphi_R * (l_1 + l_2 - l_6) + P_{2Y} * \cos \varphi_R * (l_6 - l_1) - P_{2X} * \sin \varphi_R * (l_6 - l_1) + P_{1Y} * \sin \varphi_R * m_2 - P_{1X} * \cos \varphi_R * m_2 + P_{2Y} * \sin \varphi_R * m_2 + P_{2X} * \cos \varphi_R * m_2 - R_2 * (l_6 - l_5 - w) + R_1 * (l_7 + l_5 + w - l_6) \quad (10)$$

Rovnice pro síta:

$$m_S * \ddot{X}_S = -F * \cos \varphi_R + R_1 * \sin \varphi_S + R_2 * \sin \varphi_S \quad (11)$$

$$m_S * \ddot{Y}_S = F * \sin \varphi_S + R_1 * \cos \varphi_S + R_2 * \cos \varphi_S - Gs \quad (12)$$

$$I_S * \ddot{\varphi}_S = R_2 * l_8 - R_1 * (l_7 - l_8) - F * (m_3 - m_4 - m_5) \quad (13)$$

3.3. Vazbové rovnice

Nyní je k dispozici 6 rovnic o 9 neznámých: $X_R, Y_R, \varphi_R, X_S, Y_S, \varphi_S, F, R_1, R_2$. Proto je potřeba ještě 3 vazbových rovnic, ve kterých se budou neznámé vyskytovat. Z posuvné vazby mezi sítou a rámem lze usoudit, že natočení síty a rámu bude stejné, tj

$$\varphi_R = \varphi_S \quad (14)$$

Dále lze sestavit dvě rozměrové vazbové rovnice, obě pro celkovou soustavu těles:

$$X_S + l_8 + l_5 = l_1 + \xi_2 - l_1 * \cos \varphi_S + m_4 * \sin \varphi_S + l_5 * \cos \varphi_S + w * \cos \varphi_S + l_8 * \cos \varphi_S \quad (15)$$

$$m_4 + m_5 + Y_S = \eta_2 + l_1 * \sin \varphi_S + m_4 * \cos \varphi_S - l_5 * \sin \varphi_S - w * \sin \varphi_S - l_8 * \sin \varphi_S + m_5 * \cos \varphi_S \quad (16)$$

V rovnicích se ale vyskytují deformace pružin ξ a η , které je potřeba vyjádřit pomocí neznámých proměnných X_r, Y_r a φ_R , tedy:

$$\xi_1 = l_3 + l_4 + X_R - (l_3 + l_4) * \cos \varphi_R - m_1 * \sin \varphi_R \quad (17)$$

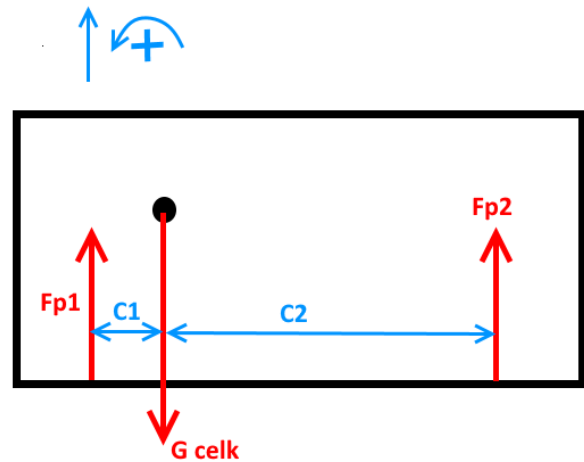
$$\xi_2 = l_2 + l_3 + l_4 + X_R - (l_2 + l_3 + l_4) * \cos \varphi_R - m_1 * \sin \varphi_R \quad (18)$$

$$\eta_1 = (l_3 + l_4) * \sin \varphi_R - m_1 * \cos \varphi_R + m_1 + Y_R \quad (19)$$

$$\eta_2 = (l_2 + l_3 + l_4) * \sin \varphi_R - m_1 * \cos \varphi_R + m_1 + Y_R \quad (20)$$

3.4. Počáteční podmínky

Pro další výpočty v numerickém řešiči budou potřeba také počáteční podmínky (polohy) obou těles. Ty lze získat pomocí vyřešení statické rovnovážné polohy, kdy ze statiky lze dostat velikost sil v pružinách (obr. 6). (Zanedbává se posuv soustavy ve směru osy X)



Obr. 6: Statická poloha

$$Y: G = Fp1 + Fp2 \quad (21)$$

$$M: Fp2 * C2 - Fp1 * C1 = 0 \quad (22)$$

$$\longrightarrow Fp1 = \frac{Fp2 * C2}{C1} \quad (23)$$

$$G = \frac{Fp2 * C2}{C1} + Fp2 \quad (24)$$

$$\longrightarrow Fp2 = \frac{G}{\frac{C2}{C1} + 1} \quad (25)$$

$$Fp1 = \frac{G}{\frac{C2}{C1} + 1} * \frac{C2}{C1} \quad (26)$$

Díky těmto vyjádřením sil v pružinách je možné spočítat počáteční deformace pružin jako $\xi = Fp/k$, kde k je tuhost pružiny. Dále je také možné vyjádřit počáteční natočení φ_0 , které plyne z geometrie:

$$\varphi_0 = \arctg \left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{l_2} \right) \quad (27)$$

Po počátečním natočení síty a rámu (které je pro obě tělesa shodné) je potřeba také určit počáteční výchylky rámu a síty. Na obrázku 2 jsou tyto označeny X_r, Y_r, X_s, Y_s . Stejným principem jako při určování vazbových rovnic (15,16) lze určit rovnice pro statickou rovnovážnou polohu z geometrie soustavy:

$$Y_{R0} = l_0 + m_1 - (l_0 - \xi_1 - (l_3 + l_4) * \sin \varphi_0 + m_1 * \cos \varphi_0) \quad (28)$$

$$X_{R0} = (l_3 + l_4) * \cos \varphi_0 + m_1 * \sin \varphi_0 - (l_3 + l_4) \quad (29)$$

$$Y_{S0} = \eta_2 + l_1 * \sin \varphi_0 + m_4 * \cos \varphi_0 - l_5 * \sin \varphi_0 - l_8 * \sin \varphi_0 + m_5 * \cos \varphi_0 - m_4 - m_5 \quad (30)$$

$$X_{S0} = \xi_2 - l_1 * \cos \varphi_0 + m_4 * \sin \varphi_0 + l_5 * \cos \varphi_0 + l_8 * \cos \varphi_0 + l_1 - l_8 - l_5 \quad (31)$$

4. Řešení rovnic

Nyní je k dispozici 9 rovnic (rovnice 8 až 16), které je potřeba vyřešit. Nicméně prvních 6 rovnic je diferenciálních druhého řádu a další 3 rovnice jsou algebraické. To nelze reálně spočítat ručně a proto je nutno použít numerický řešič MATLAB, který umí řešit soustavu diferenciálních a algebraických rovnic.

4.1. Zadání do MATLABU

Nejdříve ze všeho byl vytvořen vedlejší skript obsahující všechny konstanty (rozměry, tuhosti, hmotnosti,...). Tento skript se pak nahraje do hlavního výpočetního skriptu, který si tyto konstanty takto převezme a může s nimi dál počítat.

Do hlavního skriptu se jako první nahraje skript vedlejší. Dále se zvolí počáteční a koncový čas řešení a zavedeme symbolické proměnné (čas t a 9 neznámých). Poté lze psát všechny potřebné rovnice, tzn. deformační podmínky pružin, rovnice sil od pružin, rovnici pro excentr a nakonec vyjádření soustavy rovnic pro obě tělesa (rovnice 8 až 16). Ze soustavy rovnic pro tělesa je potřeba udělat vektor, který bude mít 9 členů. S tímto vektorem nyní bude MATLAB postupně pracovat.

4.2. Části kódu MATLABU

zavedení vektoru neznámých

```
vars = [xr(t); yr(t); Fir(t); xs(t); ys(t); Fis(t); R1(t); R2(t); F(t)]
```

vyjádření soustavy rovnic

```
eqn1 = mr*diff(xr(t),2) == F(t)*cos(Fir(t))-R1(t)*sin(Fir(t))-R2(t)*sin(Fir(t))+Plx+P2x;
eqn2 = mr*diff(yr(t),2) == Ply+P2y-F(t)*sin(Fir(t))-R1(t)*cos(Fir(t))-R2(t)*cos(Fir(t));
eqn3 = Ir*diff(Fir(t),2) == F(t)*(m3-m2)+W1-R2(t)*(16-15-Om)+R1(t)*(17+15-Om-16);
eqn4 = ms*diff(xs(t),2) == R1(t)*sin(Fis(t))+R2(t)*sin(Fis(t))-F(t)*cos(Fis(t));
eqn5 = ms*diff(ys(t),2) == F(t)*sin(Fis(t))+R1(t)*cos(Fis(t))+R2(t)*cos(Fis(t));
eqn6 = Is*diff(Fis(t),2) == R2(t)*18-R1(t)*(17-18)-F(t)*(m3-m4-m5);
eqn7 = Fis(t) == Fir(t);
eqn8 = xs(t)+18+15 == 11+ksi2-11*cos(Fis(t))+m4*sin(Fis(t))+15*cos(Fis(t))+Om*cos(Fis(t))+18*cos(Fis(t));
eqn9 = m4+m5+ys(t) == ny2+11*sin(Fis(t))+m4*cos(Fis(t))-15*sin(Fis(t))-Om*sin(Fis(t))-18*sin(Fis(t))+m5*cos(Fis(t));
```

```
eqns = [eqn1 eqn2 eqn3 eqn4 eqn5 eqn6 eqn7 eqn8 eqn9];
```

převedení na soustavu 1. řádu

```
[eqns, vars] = reduceDifferentialOrder(eqns, vars);
```

snížení indexu soustavy a další derivace

```
[DAEs,DAEvars] = reduceDAEIndex(eqns,vars);
[DAEs,DAEvars] = reduceRedundancies(DAEs,DAEvars);
```

nalezení konzistentních PP

```
[y0 yp0] = decic(F, 0, y0est, [], yp0est, [])
```

vyřešení

```
[tSol,ySol] = ode15i(F, [t0:w/1000:tf], y0, yp0);
```

Toto není kompletní kód. Pro kompletní kód mě neváhejte kontaktovat, rád ho poskytnu a případně vysvětlím detailněji.

4.3. Popis postupu numerického řešiče

Když je k dispozici vektor rovnic, lze nejprve zjistit, zda je matice rovnic a neznámých regulární, tzn., je-li v každé rovnici alespoň jedna neznámá. Pokud ano, pak lze MATLABu říci aby soustavu převedl pomocí substituce na soustavu rovnic prvního řádu.

Po tomto převedení je potřeba zkontrolovat, jestli je index diferenciálních algebraických rovnic nízký (0 nebo 1). Pokud je, program vrátí hodnotu 1. Zde ale nejprve vrací hodnotu 0 a proto je potřeba index soustavy zredukovat. To se provede příkazem „*reduceDAEIndex*“, který sníží index zavedením dalších derivací původních rovnic a zavedením dalších substitucí. Tento příkaz ale také zavede rovnice, které nejsou potřeba pro výpočet, a proto je vhodné redundantní rovnice redukovat. To se provede příkazem „*reduceRedundancies*“. Nyní se znovu provede kontrola nízkého indexu rovnic. Pokud program vrací hodnotu 1, pak je soustava rovnic připravená pro ODE řešič. Na danou soustavu se použije řešič *ODE15i*, který ale potřebuje zadat počáteční podmínky. Ty jsou vyřešeny z předchozích kroků (rovnice 27 až 31), a proto není problém je dosadit. Program také potřebuje jejich derivace, které jsou ale nulové (jsou to konstanty). Z těchto počátečních podmínek se pomocí řešiče *DECIC* najdou konzistentní podmínky, které už program může použít při výpočtu. Nyní lze zapsat příkaz pro řešení *ode15i(F, [t0:w/1000:tf], y0, yp0)*, kde F je vektor redukováných a substituovaných rovnic, $t0$ a tf jsou časové hodnoty pro začátek a konec řešení, w je úhlová rychlost motoru, $y0$ jsou konzistentní počát. podmínky a $yp0$ jsou jejich derivace.

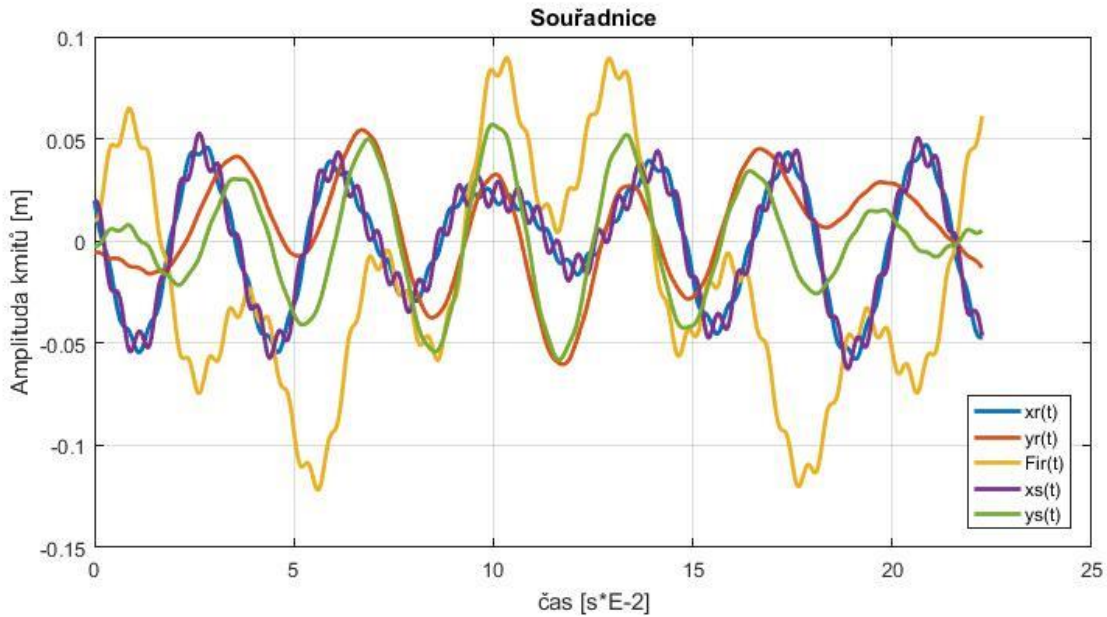
Po vyřešení je potřeba výsledky vykreslit do grafů.

5. Výsledky a diskuze

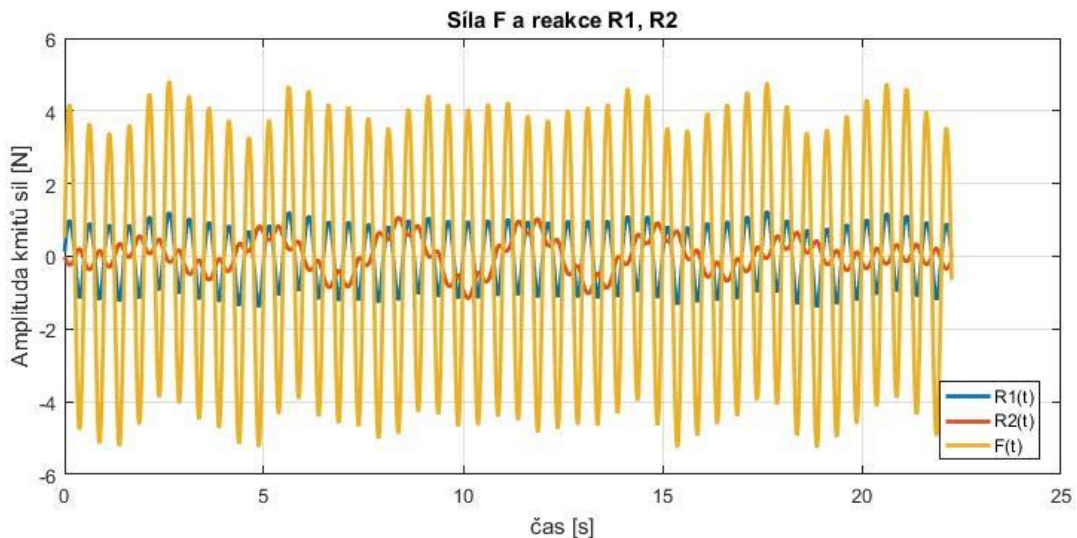
Na obrázku 7 je graf výchylek pro souřadnice X_r , Y_r , F_i , X_s a Y_s rámu a síť. Na dalším obrázku (8) je pak průběh sil F , R_1 a R_2 v čase.

Na prvním grafu (obr. 7) lze vidět, že všech pět souřadnic má vedle hlavních kmitů i kmitky vedlejší. To je nejspíše způsobeno budící silou F , která kmitá odlišně od kmitání soustavy. Největší rozkmit má podle grafu úhel natočení F_i , který má maximální hodnotu kolem $0,12s^{-1}$. To ale moc neodpovídá skutečnosti, kdy úhel natočení byl přibližně 2° .

Je také vidět shodné kmitání rámu a sítě, jelikož souřadnice X_r a X_s mají shodný průběh. Stejně tak souřadnice Y_r a Y_s kmitají velmi podobně.



Obr. 7: Graf výchylek souřadnic



Obr. 8: Průběhy sil F , R_1 a R_2

Tento graf (obr. 7) se bude porovnávat s vyhodnocením videa pomocí korelační metody, které je náplní práce kolegy Machače (STČ 2018 Machač, „Vyhodnocení experimentálního měření kmitání vibrační třídičky pomocí optické metody“). Díky výstupům z obou prací lze říci, jak přesný je tento matematicko-mechanický model třídičky.

Na dalším grafu (obr. 8) je průběh budící síly F a také dvou sil reakčních R_1 a R_2 . Je patrné, že síly R_1 a R_2 kmitají stejnou frekvencí, ale s různými amplitudami kmitů. Je možné, že to způsobuje umístění motoru s excentrem na straně síly R_1 a tím pádem je tato síla přitěžována.

Průběhy grafů a jejich reálnosti budou nicméně předmětem dalšího zkoumání a posuzování během zbytku semestru. Stejně jako porovnávání a určení případných odchylek od vyhodnocení reálného kmitání pomocí videa.

Prozatím tedy není projekt stoprocentně kompletní.

6. Závěr

Předmětem této práce bylo popsat kmitání vibrační třídičky olejnatých semen pomocí matematicko-mechanického modelu. Po sestavení N-E pohybových rovnic a vyjádření potřebných pomocných rovnic a hodnot bylo možné tyto rovnice zadat do programu MATLAB a řešit soustavu algebraicko-diferenciálních rovnic pomocí řešiče *ODE15i*.

Výsledky ve formě grafů poslouží k porovnání s grafy z vyhodnocení reálného kmitání pomocí videa a korelační metody. Poté lze konstatovat, jak přesné jsou tyto modelové výpočty. Je nutné říci, že bylo zanedbáno tření v posuvné vazbě mezi rámem a sítí, nicméně by toto zjednodušení nemělo mít významný vliv na výsledky (leštěný mazaný povrch). Pokud by se průběhy souřadnic z obou prací (těto a z vyhodnocení pomocí videa) výrazně neshodovaly, pak lze mechanický model zpřesnit zavedením tření.

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu inženýrovi Janu Hoidekrovi za pomoc při práci s MATLABem a za celkovou pomoc při řešení této práce.

Seznam symbolů

F	síla od motoru (N)
F_{p1}	síla od levé pružiny (N)
F_{p2}	síla od pravé pružiny (N)
G	tíha celé soustavy (N)
G_r	tíha rámu (N)
G_s	tíha sít (N)
k_y	tuhost pružin v osovém směru (N/m)
k_p	tuhost pružin v příčném směru (N/m)
m_r	hmotnost rámu (kg)
m_s	hmotnost sít (kg)
P_{1x}	příčná síla od levé pružiny (N)
P_{1y}	osová síla od levé pružiny (N)
P_{2x}	příčná síla od pravé pružiny (N)
P_{2y}	osová síla od pravé pružiny (N)
R_1	levá reakční síla v posuvné vazbě (N)
R_2	pravá reakční síla v posuvné vazbě (N)
W	úhlová rychlost excentru (rad/s)
X_r	výchylka rámu ve směru X (m)
X_s	výchylka sít ve směru X (m)
Y_r	výchylka rámu ve směru Y (m)
Y_s	výchylka sít ve směru Y (m)
X_{r0}	počáteční výchylka rámu ve směru X (m)
X_{s0}	počáteční výchylka sít ve směru X (m)
Y_{r0}	počáteční výchylka rámu ve směru Y (m)
Y_{s0}	počáteční výchylka sít ve směru Y (m)
η_1	deformace levé pružiny ve směru Y (m)
η_2	deformace pravé pružiny ve směru Y (m)
ξ_1	deformace levé pružiny ve směru X (m)
ξ_2	deformace pravé pružiny ve směru X (m)
φ_0	počáteční natočení soustavy (rad)
φ_e	natočení excentru (rad)
φ_r	natočení rámu (rad)
φ_s	natočení sít (rad)

Literatura

- [1] STEJSKAL, Vladimír. *Kmitání s Matlabem*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02435-0.
- [2] *Mechanika C*. Praha, 2004. Nevydané skriptum. České vysoké učení technické v Praze. Vedoucí práce Prof. Ing. Michael Valášek, DrSc.; Ing. Václav Bauma, CSc.; Doc. Ing. Zbyněk Šika, Ph.D.
- [3] Stejskal V., Bauma V., Vampola T.: *Kmitání mechanických soustav – doplňkové skriptum*. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003.