Numerická simulace proudění v hydrostatickém ložisku

Martin Hanek

Vedoucí práce

prof. RNDr. Pavel Burda, CSc.

Školitelé specialisti

Ing. Jakub Šístek, PhD., Ing. Eduard Stach

Abstrakt

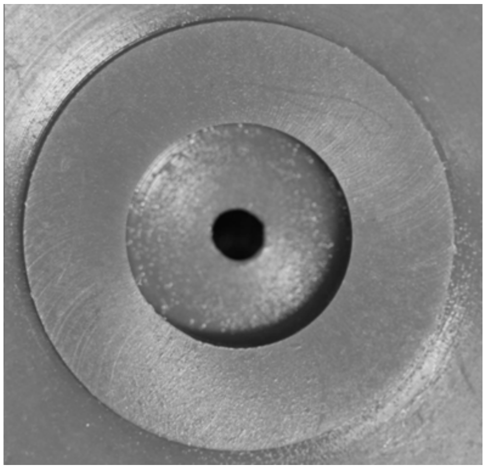
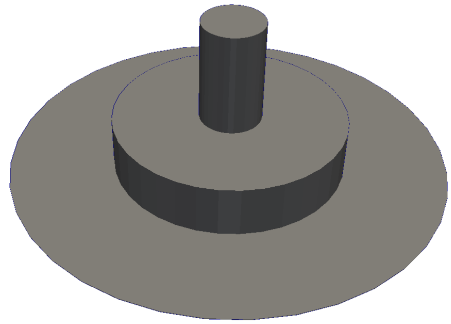
Ve své práci se zabývám numerickým řešením Navierových-Stokesových rovnic pro stacionární proudění v hydrostatickém ložisku pomocí metody konečných prvků. Nejprve se věnuji 2D úloze pro rotačně symetrické proudění a poté se zabývám problematikou řešení 3D úlohy, kde využiji rozklad oblasti na nepřekrývající se podoblasti a předpodmiňovač BDDC.

Klíčová slova

hydrostatické ložisko, Navierovy-Stokesovy rovnice, metoda konečných prvků, BDDC

1 Úvod

Ve své práci se zabývám numerickou simulací stacionárního nestlačitelného proudění uvnitř hydrostatického ložiska v hydrostatickém vedení pomocí metody konečných prvků. Problematikou hydrostatického vedení se zabívají na Ústavu výrobních strojů a zařízení fakulty strojní ČVUT v Praze (více o této problematice viz Holkup a kol. [3]). Tato práce vychází z mé bakalářské práce, v níž jsem se zabýval rotačně symetrickou 2D úlohou a jejíž výsledky zde mimo jiné prezentuji (více viz Hanek [4]). Tato úloha odpovídá vedení v klidu a její výsledky jsem měl možnost ověřit experimentem. Dále se zabývám problematikou řešení 3D úlohy, a tedy i úlohou s pohybem dolním stěny, kde pro numerický výpočet využiji rozklad oblasti a předpodmiňovač BDDC (Ballancing Domain Decomposition by Constraints). Nejprve se v 2. kapitole věnuji slabé formulaci úloh. Ve 3. kapitole se zabývám použitím metody konečných prvků pro oba typy úloh. Kapitola 4. pak ukazuje použití rozkladu oblasti a způsob použití BDDC pro 3D úlohu a v 5. kapitole pak uvádím numerické výsledky jednotlivých úloh. Výpočty provádím pro ložisko s rotačně symetrickou hydrostatickou kapsou, což je oblast, ve které proudí tekutina. Na Obrázku 1 je pro ilustraci fotografie reálné kapsy a 3D model její oblasti řešení.

Obrázek 1: Hydrostatická kapsa (vlevo) a model 3D oblasti tekutiny (vpravo)

2 Slabá formulace úlohy

Ve svých výpočtech uvažuji stacionární nestlačitelné proudění. To odpovídá Navierovým-Stokesovým rovnicím ve tvaru (např. [1])

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{v } \Omega, & (1)\\ \nabla\cdot\mathbf{u} &= 0 \quad \text{v } \Omega, & (2) \end{aligned}$$

kde $\mathbf{u}$ je neznámý vektor rychlosti, p je neznámý tlak, ν je daná kinematická viskozita tekutiny, $\mathbf{f}$ je známý vektor objemových sil a Ω je oblast na které úlohu řeším.

Při odvození slabé formulace rotačně symetrické 2D úlohy vyjdu ze slabé formulace 3D úlohy a proto jí v této kapitole uvádím jako první.

2.1 3D úloha

Při slabé formulaci přenásobíme rovnice (1) a (2) testovacími funkcemi $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3$ a $q \in L^2(\Omega)$ a integrací přes oblast Ω dostáváme

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega - \nu\int_\Omega \Delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega, \qquad \mathbf{v} \in \left(H^1(\Omega)\right)^3,\\ \int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}\Omega &= 0, \qquad\qquad q \in L^2(\Omega), \end{aligned}$$

a aplikací Greenovi věty získáme výslednou slabou formulaci ve tvaru:

Hledáme $\boldsymbol{u} \in (H^1(\Omega))^3$ *a* $p \in L^2(\Omega)$*, tak aby*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega - \nu\int_\Gamma (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma + \nu\int_\Omega \nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega \quad & + & & \qquad (3)\\
+\int_\Gamma p\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega p\nabla\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega \quad & = & \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}\Omega, \qquad & \forall\mathbf{v}\in\left(H^1(\Omega)\right)^3, \qquad (4)\\
\int_\Omega q\nabla\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}\Omega \quad & = & 0, \qquad & \forall q\in L^2(\Omega). \qquad (5)
\end{aligned}$$

2.2 Rotačně symetrická úloha

Slabou formulaci pro rotačně symetrickou 2D úlohu jsem odvodil ze slabé formulace 3D úlohy. To provedu rozepsáním slabé formulace 3D úlohy do jednotlivých složek a následné transformaci do válcových souřadnic. Celé toto odvození a i druhý způsob získání slabé formulace z N-S rovnic pro rotačně symetrické proudění (viz Šístek [5]) s následným využitím váhových prostorů je uvedeno v mé bakalářské práci (viz Hanek [4]). Výsledná slabá formulace pro rotačně symetrickou 2D úlohu je tedy:

Hledáme $u_r, u_a \in H^1_r(\Omega)$ *a* $p \in L^2_r(\Omega)$*, tak aby*

$$\int_\Omega \left(u_r\frac{\partial u_a}{\partial r}v_a r + u_a\frac{\partial u_a}{\partial w}v_a r\right)\mathrm{d}\Omega + \nu\int_\Omega\left(\frac{\partial u_a}{\partial r}\frac{\partial v_a}{\partial r}r + \frac{\partial u_a}{\partial w}\frac{\partial v_a}{\partial w}r\right)\mathrm{d}\Omega -$$

$$-\nu\int_\Gamma\left(\frac{\partial u_a}{\partial r}v_a n_r r + \frac{\partial u_a}{\partial w}v_a n_w r\right)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega p\frac{\partial v_a}{\partial w}r\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma p v_a n_w r\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega f_w v_a r\mathrm{d}\Omega, \qquad \forall v_a \in H^1_r(\Omega), \qquad (6)$$

$$\int_\Omega\left(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}v_r r + u_a\frac{\partial u_r}{\partial w}v_r r\right)\mathrm{d}\Omega + \nu\int_\Omega\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r}r + \frac{\partial u_r}{\partial w}\frac{\partial v_r}{\partial w}r + \frac{u_r}{r}v_r\right)\mathrm{d}\Omega - \nu\int_\Gamma\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}v_r n_r r + \frac{\partial u_r}{\partial w}v_r n_w r\right)\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_\Omega\left(p v_r + p\frac{\partial v_r}{\partial r}r\right)\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma p v_r n_r r\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega f_r v_r r\mathrm{d}\Omega, \qquad \forall v_r \in H^1_r(\Omega), \qquad (7)$$

$$-\int_\Omega\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}qr + u_r q + \frac{\partial u_a}{\partial w}qr\right)\mathrm{d}\Omega = 0, \qquad \forall q \in L^2_r(\Omega). \qquad (8)$$

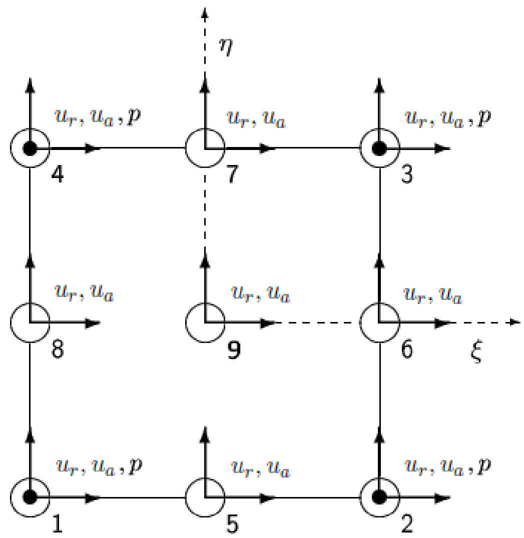
3 Metoda konečných prvků

Při řešení Navierových-Stokesových rovnic je důležité vhodné zvolení funkčních prostorů pro rychlost a tlak. Metoda konečných prvků využívá k aproximaci polynomy různého stupně. Pro řešení Navierových-Stokesových rovnic aproximujeme na každém prvku rychlost polynomem 2. stupně a tlak polynomem 1. stupně.

Následující vlastnosti požadovaného řešení jsou spojeny se slabou formulací Navierových-Stokesových rovnic:

- každá složka rychlosti je funkce integrovatelná s kvadrátem podle $\mathbf{x}$ a má minimálně první zobecněnou derivaci podle libovolné souřadnice integrovatelnou s kvadrátem (prostor $H^1(\Omega)$)
- tlak je funkce integrovatelná s kvadrátem podle $\mathbf{x}$ (prostor $L^2(\Omega)$)

Existuje několik typů konečných prvků, jejichž pomocí lze řešit Navierovy-Stokesovy rovnice. Ve svém výpočtu používám Taylorovy-Hoodovy čtyřúhelníkové konečné prvky. Tyto prvky jsou pro 2D úlohu obecně čtyřúhelníky kde aproximuji tlak v jeho vrcholech a rychlost ve vrcholech, středech stran a uprostřed prvku (viz Obrázek 2). Pro 3D úlohu to jsou šestistěny, kde opět aproximuji tlak v jeho vrcholech a rychlost navíc ještě ve středu každé hrany.



Obrázek 2: Tylorův-Hoodův referenční prvek ve 2D

3.1 Sestavení systému algebraických rovnic

Při sestavování sytému algebraických rovnic pro oba typy úloh dosadím do slabé formulace za konečně prvkové funkce rychlosti a tlaku linerní kombinace bázových funkcí a dostanu výslednou nelineární soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{N} & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

kde $\mathbf{u}$ je vektor neznámých rychlostí, p je vektor nezámých tlaků, $\mathbf{A}$ je matice difuze, $\mathbf{N}$ je matice advekce, B je matice od rovnice kontinuity a $\mathbf{f}$ je diskretní vektor intenzity objemových sil. Matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$ a B sestavíme takto (viz Elman, Silvester a Wathen [2])

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ij}], \qquad \mathbf{a}_{ij} = \int_\Omega \nabla \vec{\varphi}_i \colon \nabla \vec{\varphi}_j, \tag{10}$$

$$\mathbf{N} = [\mathbf{n}_{ij}], \qquad \mathbf{n}_{ij} = \int_\Omega (\vec{u}_h \cdot \nabla \vec{\varphi}_j) \cdot \vec{\varphi}_i, \tag{11}$$

$$B = [b_{ij}], \qquad b_{ij} = -\int_\Omega \psi_i \nabla \cdot \vec{\varphi}_j, \tag{12}$$

kde $\vec{\varphi}_i$ je bázová funkce rychlosti a ψ_i je bázová funkce tlaku.

Soustava (9) je díky matici $\mathbf{A}$ nelineární a pro její linerizaci využívám Picardovu iteraci, která vede na systém rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}(\mathbf{u}^k) + \mathbf{N} & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{k+1} \\ p^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

kde $\mathbf{A}(\mathbf{u}^k)$ znamená, že linearizuji matici $\mathbf{A}$ pomocí řešení v předchozím kroku. Tuto, již lineární soustavu, řeším ve 2D přímou metodou (pomocí LU rozkladu pro řídké matice), zatímco ve 3D vzhledem k velikosti úlohy využiji iterační metodu dělení oblasti BDDC.

4 Rozklad oblasti a předpodmiňovač BDDC

Pro výpočet 3D úlohy využijeme rozkladu oblasti na několik podoblastí. Použijeme rozklad bez překryvu jednotlivých podoblastí a v systému rovnic (13) si přečíslujeme složky neznámých vektorů $\mathbf{u}$ a p tak, že složky odpovídající uzlům na rozhraní očísluji jako poslední. To vede na následující systém rovnic

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{11}^T & B_{21}^T \\ \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & \nu\mathbf{A}_{22} + \mathbf{N}_{22} & B_{12}^T & B_{22}^T \\ B_{11} & B_{12} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

kde index 1 značí část týkající se vnitřku oblatí a index 2 část odpovídající uzlům na rozhraní, přečemž každá matice odpovídající prvkům matice z levé strany této rovnice je sestavena z bloků odpovídajících jednolivým podoblastem. Pro použití předpodmiňvače BDDC převedu tento systém na řešení na rozhraní a na řešení uvnitř podoblastí (viz Šístek a kol. [6]).

Nejprve si přepíšeme systém (14) do následujícího tvaru

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T & \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{21}^T \\ B_{11} & 0 & B_{12} & 0 \\ \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T & \nu\mathbf{A}_{22} + \mathbf{N}_{22} & B_{22}^T \\ B_{21} & 0 & B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

a po roznásobení po blocích pro vnitřní neznámé a pro neznámé na rozhraní dostáváme

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{21}^T \\ B_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{22} + \mathbf{N}_{22} & B_{22}^T \\ B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Z první rovnice si poté vyjádříme vektor

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{21}^T \\ B_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix}, \qquad (15)
$$

který dosadíme do druhé rovnice a dostaneme systém

$$
\begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} -
$$

$$
- \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{21}^T \\ B_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{22} + \mathbf{N}_{22} & B_{22}^T \\ B_{22} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.
$$

Ten odpovídá rovnici

$$
S \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ p_2 \end{bmatrix} = g, \qquad (16)
$$

kde

$$
g = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}
$$

je redukovaná pravá strana a

$$
S = \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{22} + \mathbf{N}_{22} & B_{22}^T \\ B_{22} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{21} + \mathbf{N}_{21} & B_{12}^T \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{11} + \mathbf{N}_{11} & B_{11}^T \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \nu\mathbf{A}_{12} + \mathbf{N}_{12} & B_{21}^T \\ B_{12} & 0 \end{bmatrix}
$$

je tzv. Schurův doplněk. Úlohu (16) řešíme iteračně pomocí metody BiCGstab a jako predpodmiňovač užíváme jeden krok metody BDDC. Po vyřešení systému (16) dosadíme řešení na rozhraní do systému (15) a získáme řešení uvnitř podoblastí. Díky rozdělení na podoblasti lze akci předpodmiňovače BDDC stejně jako násobení maticí S v každém kroku iterační metody paralelizovat a tím urychlit výpočetní čas.

5 Numerické výsledky

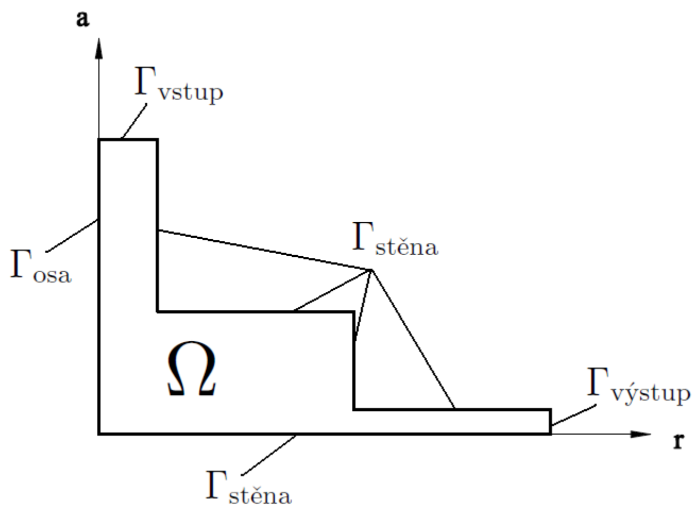
Prvním krokem při numerické simulaci pro oba typy úloh je vytvoření sítě konečných prvků. K tomu využiji volně dostupný program GMSH [7]. Dále je nutno stanovit okrajové podmínky pro naší úlohu a tyto vstupní data zadat do výpočtového programu. Pro výpočet využiji kolekci šablon C++ pro metodu konečných prvků v mechanice tekutin, která mi byla poskytnuta, a kterou jsem pro 2D případ rozšířil o implementaci rotačně symetrické úlohy. Všechny výsledky budou zpracovány ve formě 3D nebo 2D grafů proudnic a 3D grafů průběhu tlaku a rychlosti.

5.1 2D úloha

Tímto typem úlohy jsem se zabýval v mé bakalářské práci a zde prezentuji jen některé její výsledky (více viz Hanek [4]). Úloha odpovídá vedení v klidu a její výsledky jsem měl možnost ověřit experimentem.

5.1.1 Okrajové podmínky

Vzhledem k rotační symetrii úlohy vypadá oblast Ω následovně:



Obrázek 3: Oblast Ω a její hranice

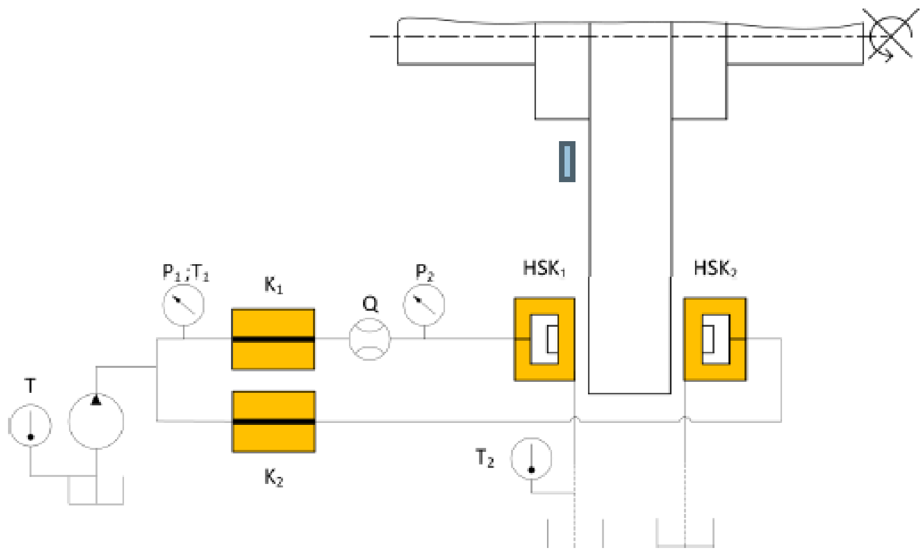
s následujícími okrajovými podmínkami

- na Γ_{vstup} předepisuji vstupní parabolický rychlostní profil pro u_a a $u_r = 0$
- na $\Gamma_{\text{stěna}}$ předepisuji tzv. "no-slip" podmínku, t.j. $u_r = u_a = 0$
- na Γ_{osa} předepisuji vzhledem k symetrii $u_r = 0$
- na $\Gamma_{\text{výstup}}$ předepisuji tzv. "do-nothing" podmínku

5.1.2 Eperimentální data

Pro možnost kontroly numerické simulace bylo provedeno experimentální měření, jehož schéma je na Obrázku 4. Parametry, které používáme při testovacím výpočtu jsou tyto:

- Q - je průtok v celém systému z něhož získáme střední vtokovou rychlost tekutiny $v_{\text{stř}}$
- T - je teplota tekutiny díky níž určíme hodnotu dynamické viskozity μ
- h - je výška škrtící mezery
- p_2 - je vstupní tlak



Obrázek 4: Schéma měření

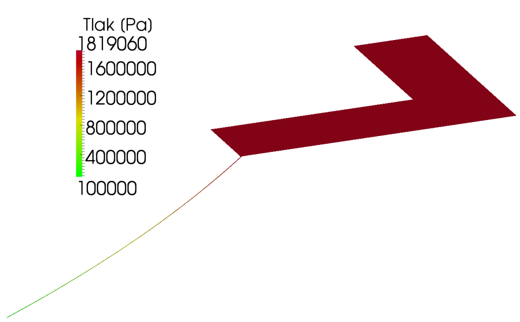
Naměřené a odvozené hodnoty použité v testovacím výpočtu jsou v Tabulce 1.

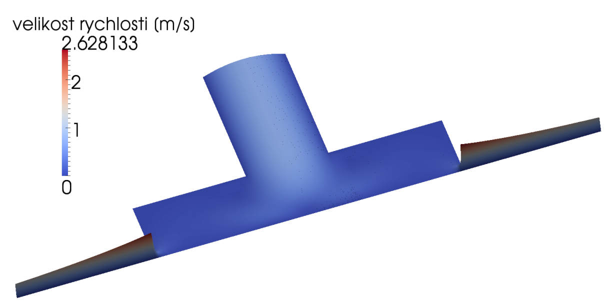
Q [l/min]	T [°C]	h [m]	p_2 [Pa]	$v_{\text{stř}}$ [m/s]	μ [Ns/m^2]
0,576	28,34	$7,74.10^{-5}$	1800236	0,3497	0,0669

Tabulka 1: Hodnoty pro porovnání s výpočtem

5.1.3 Testovací výpočet

Výsledky testovacího výpočtu jsou na Obrázcích 5-6. Na Obrázku 6 je i pro zajímavost detail singularity tlaku v místě kde tekutina vstupuje do škrtící mezery.





Obrázek 5: Průběh tlaku (vlevo) a rychlosti (vpravo) uvnitř kapsy

Obrázek 6: Proudnice (vlevo) a singularita (vpravo)

Kontrolní hodnotou testovacího výpočtu je vstupní tlak. Ten se od naměřeného liší asi o 1%. Dá se tedy předpokládat, že náš model dobře simuluje proudění uvnitř hydrostatické kapsy. Výpočet se také shoduje s analytickým řešením, které je uvedeno v Holkup a kol. [3].

Ve své bakalářské práci jsem se také zabýval vlivem změny některých vstupních parametrů. Konkrétně změnou viskozity, a tedy Reynoldsova čísla, a změnou výšky škrtící mezery. Zde uvedu jen vliv změny Reynoldsova čísla.

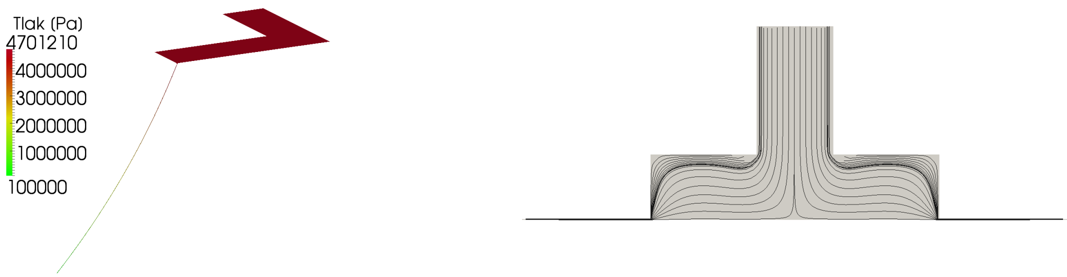
5.1.4 Vliv změny Reynoldsova čísla

Parametr, který jsem v těchto výpočtech měnil, je dynamická viskozita μ. Její hodnota se výrazně mění v závistlosti na teplotě (více viz Holkup a kol. [3]). To je spojené se změnou Reynoldsova čísla, které je definováno jako bezrozměrné číslo $R = \frac{LU}{\nu}$, kde L označuje charakteristickou délku, U označuje charakteristickou rychlost a $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ je kinematická viskozita. Pro danou úlohu užívam jako L průměr na vstupu do kapsy a U rovnou střední vtokové rychlosti. V Tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty teplot a jim odpovídající hodnoty dynamické viskozity a Reynoldsova čísla.

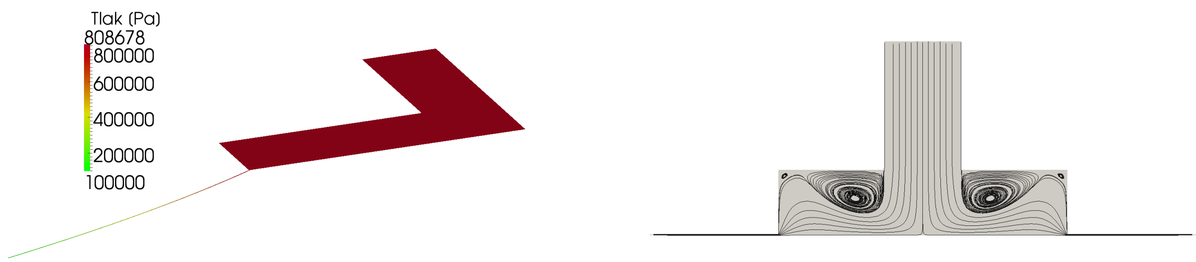
T [°C]	10	20	28,34	40	50
μ [Ns/m^2]	0,179	0,101	0,0669	0,0403	0,0276
Re [-]	5	9	14	23	33

Tabulka 2: Závislost dynamické viskozity a Reynoldsova čísla na teplotě

Výpočty byly provedeny se stejnými vstupními parametry jako v testovacím výpočtu, kromě hodnoty dynamické viskozity, kterou jsem měnil podle předchozí tabulky. Zde uvádím výsledky pouze pro hodnoty odpovídající 10°C a 50°C. Kompletní výsledky jsou uvedeny v Hanek [4]. Výstupem jsou grafy průběhu tlaku a proudnic na Obrázcích 7-8.



Obrázek 7: Průběh tlaku (vlevo) a proudnice (vpravo) uvnitř kapsy, $\mu = 0,179$ [Ns/m^2], $R = 5$



Obrázek 8: Průběh tlaku (vlevo) a proudnice (vpravo) uvnitř kapsy, $\mu = 0,0276$ [Ns/m^2], $R = 33$

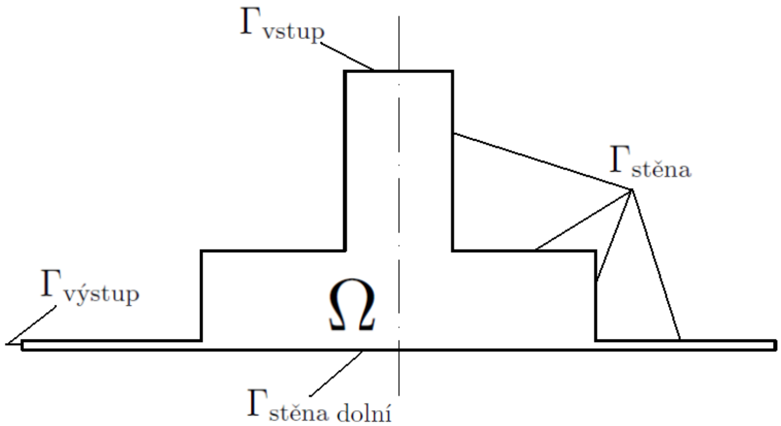
Z grafů je vidět, že při snižování hodnoty dynamické viskozity, tedy při zvyšování Reynoldsova čísla, nastává menší tlakový spád a zároveň se vytváří větší vír pod horní stranou kapsy.

5.2 3D úloha

3D úloha umožňuje simulovat proudění i za pohybu ložiska a tedy s nenulovou rychlostí dolní stěny oblasti řešení. Prvotním cílem 3D výpočtů je ale provést výpočet odpovídající parametrům z testovacího výpočtu 2D úlohy, a už to ssebou nese problémy s konvergencí úlohy. Ty budou zřejmě způsobeny hodnotou výšky škrtící mezery a tedy špatnou podmíněností některých konečných prvků, což je poměr nejdelší ku nejkratší hraně prvku. Dalšími problémy konvergence může být i reálná hodnota viskozity a případný pohyb dolní stěny.

Vzhledem k těmto problémům s konvergencí nejsem zatím schopen spočítat úlohu s reálnými parametry a ve svých výpočtech jsem se k nim zatím snažil co nejvíce přiblížit. Zde pro zajímavost uvedu výsledky s parametry blížícími se úloze s pohybem dolní stěny.

Oblast řešení je na Obrázku 9.



Obrázek 9: Okrajové podmínky 3D úlohy

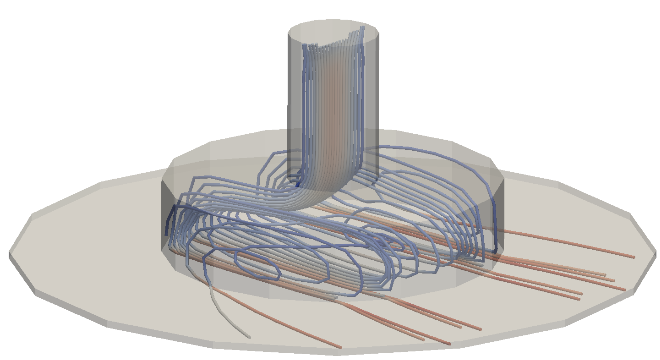
Použiji následující okrajovými podmínkami:

- na Γ_{vstup} předepisuji vstupní paraboloidový rychlostní profil pro u_z a $u_x = u_y = 0$
- na $\Gamma_{\text{stěna}}$ předepisuji tzv. "no-slip" podmínku, t.j. $u = 0$
- na $\Gamma_{\text{stěnadolní}}$ předepisuji rychlost posuvu ložiska ve směru osy x t.j. $u_x = u_{\text{dolní stěna}}$
- na $\Gamma_{\text{výstup}}$ předepisuji tzv. "do-nothing" podmínku

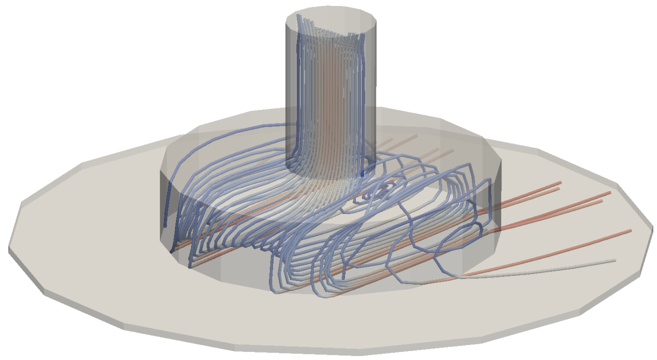
Výsledné řešení je potom na Obrázcích 10-11 s parametry uvedenými v Tabulce 3.

$v_{\text{stř}}$ [m/s]	h [m]	μ [Ns/m^2]	$v_{\text{dolní stěna}}$ [m/s]
$0,3497$	$0,001$	$0,809$	1

Tabulka 3: Hodnoty parametrů pro testovací výpočet



Obrázek 10: Proudové trubice se zabarvením podle velikosti rychlosti (zadní pohled)



Obrázek 11: Proudové trubice se zabarvením podle velikosti rychlosti (přední pohled)

6 Závěr

V práci jsem se zabýval modelováním proudění v rotačně symetrické hydrostatické buňce pomocí Navierových-Stokesových rovnic. To vede na dva typy úloh - 2D úlohu, která odpovídá vedení za klidu a jíž jsem se zabýval ve své bakalářské práci, a 3D úlohu, která umožnuje simulaci i za pohybu ložiska ve vedení. Z výsledků pro 2D úlohu je vidět, že jsou pro testovací výpočet v dobré shodě s experimentem a tak dávají dobrou představu o proudění uvnitř hydrostatické kapsy za klidu vedení. Dále je vidět z analýzy vlivu změny Reynoldsova čísla, že velký vliv na vznik vírů má dynamická viskozita, která se výrazně mění s teplotou tekutiny. Z presentovaných výsledků pro 3D úlohu je vidět, že zatím nejsem schopen provést výpočty pro reálné parametry jako v případě 2D úlohy, ale pro úlohu s pohybem ložiska ve vedení dostáváme alespoň přibližnou představu o charakteru proudění.

Literatura

[1] Feistauer, M. *Mathematical methods in fluid dynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1993

[2] Elman, H. C., Silvester, D. J., Wathen, A. J. *Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics*, Oxford University Press, New York, 2005

[3] Holkup, T., Sušeň, J., Stach, E., Hudec, J., Mareš, M., Morávek, M. *Závěrečná zpráva projektu 1.4.1.A za rok 2011*, ČVUT, Praha, 2011

[4] Hanek, M. *Numerická simulace proudění v hydrostatické buňce*, ČVUT, Praha, 2012

[5] Šístek, J. *Stabilization of finite element method for solving incompressible viscous flows*, Diplomová práce, ČVUT, Praha, 2004

[6] Šístek, J., Sousedík, B., Burda, P., Mandel, J., Novotný, J. *Application of the parallel BDDC preconditioner to Stokes flow*, Computers and fluids 46, 429-435, 2011

[7] Geuzaine, C., Remacle, J. F. *Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities* [online], dostupné z http://www.geuz.org/gmsh/.htlm