

Numerické řešení modelu proudění v porézní hornině s puklinou

Martin Hanek

Vedoucí práce

prof. RNDr. Pavel Burda, CSc.

1 Úvod

Zajímá nás jednofázová tekutina v puklině porézní horniny. Studie je provedena v měřítku, v němž mohou být pukliny modelovány individuálně. Pukliny mají malou šířku a jsou považovány za rozhraní mezi podoblastmi. Také předpokládáme, že pukliny jsou zaplněné suti, a že průtok v puklině se řídí Darcyho zákonem.

Rozlišujeme dva typy puklin: pukliny, které mají propustnost větší než v okolním prostředí a ty, u kterých je propustnost nižší než v okolním prostředí. V hornině s prvně jmenovným typem pukliny má tekutina tendenci proudit do pukliny a pak podél ní. V tomto případě by se nemělo očekávat, že Darcyho rychlost bude stejná na obou stranách pukliny. V důsledku toho, že puklina je považována za rozhraní, normalová složka rychlosti nemusí být spojitá přes toto rozhraní. Starší model popsany Alboinem, Jaffrém a Robertsem [1] byl založen na předpokladu, že propustnost v lomu byla velká a skok v normalové složce rychlosti přes rozhraní byl povolen.

Nicméně, když má puklina menší propustnost, přirozeně má tekutina tendenci se vyhnout puklině, což ve skutečnosti představuje geologické bariéry. Dvě geologické vrstvy oddělené bariérou mají málo kontaktu. Je tedy pochopitelné, že tlak nemusí být stejný na obou stranách pukliny. V tomto případě tlak není spojitý v celé puklině-rozhraní.

Tady presentujeme model, který zobecňuje ten dřívější, takže se vypořádá s malými i velkými propustnostmi puklin [2]. Starší model předpokládá spojitost tlaku přes rozhraní. Toto už není případ tohoto modelu.

Cílem této práce je numericky vyřešit matematický model proudění tekutiny v porézní hornině s puklinou popsany rovnicemi (1)-(6). K tomu užijeme diferenční metodu. Pro porovnání výsledků využijeme analytické řešení tohoto matematického modelu, které bylo získáno pomocí Fourierovy metody.

2 Matematický model

Nechť Ω_1 je jednorozměrná oblast $(0, 1)$ a Ω_2 je dvourozměrná oblast $(0, 1) \times (0, 1)$, zahrnující systém rovnic:

$$-k_2 \Delta p_2(x, y) = 0 \quad \text{na } \Omega_2 \quad (1)$$

$$p_2(x, 1) = P_2 \quad (2)$$

$$k_2 \frac{p_2}{y}(x, 0) = \sigma(p_2(x, 0) - p_1(x)) \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial p_2}{\partial x}(1, y) = 0 \quad (4)$$

a

$$-k_1 p_1''(x) = \sigma(p_2(x, 0) - p_1(x)) \quad (5)$$

$$p_1(0) = P_1 \text{ a } p_1'(1) = 0 \quad (6)$$

kde k_1 je kapalinová vodivost na jednorozměrné prasklině, k_2 je kapalinová vodivost na dvourozměrné čtvercové oblasti, σ je vodní výměnný koeficient mezi dvou a jednorozměrnou oblastí, P_1 je Dirichletova okrajová podmínka na levém okraji oblasti Ω_1 a P_2 je Dirichletova okrajová podmínka na horním okraji oblasti Ω_2 .

3 Analytické řešení

Řešení $p_1(x)$ a $p_2(x, y)$ na oblasti Ω_1 respektive na oblasti Ω_2 pomocí rozvoje řad pro $k_1 = 10$, $k_2 = 1$, $P_1 = -20$, $P_2 = 0$ a $\sigma = 1$:

$$p_2(x, y) = P_2 - B_0 + B_0 y - 2B_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\pi n x) \sinh(n\pi(1 - y))) \quad (7)$$

$$p_1(x) = P_2 - B_0 - u_0 \cosh((1 - x)\sqrt{\frac{\sigma}{k_1}}) - 2B_0 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(\pi n x) \quad (8)$$

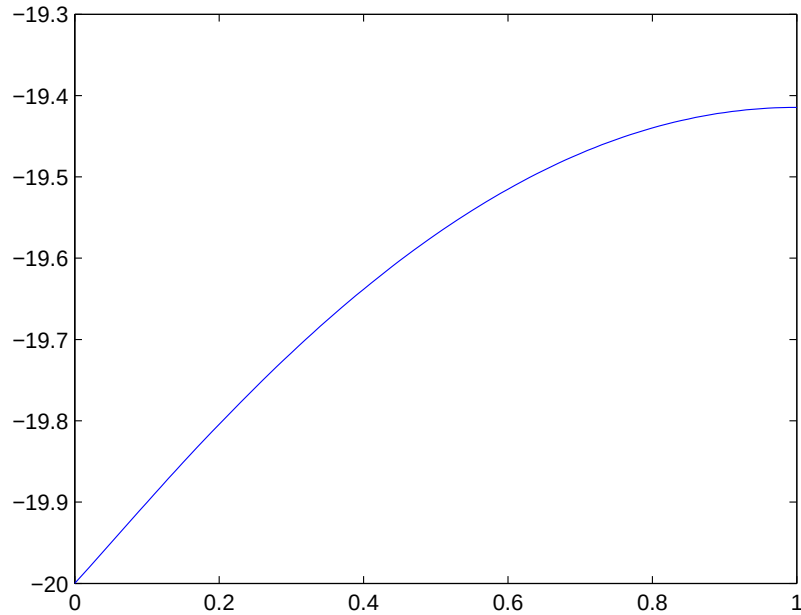
kde

$$a_n = \frac{\sigma k_2}{k_2 \pi n \cosh(\pi n)(\sigma + k_1 \pi^2 n^2) + \sigma k_1 \pi^2 n^2 \sinh(\pi n)} , \quad (9)$$

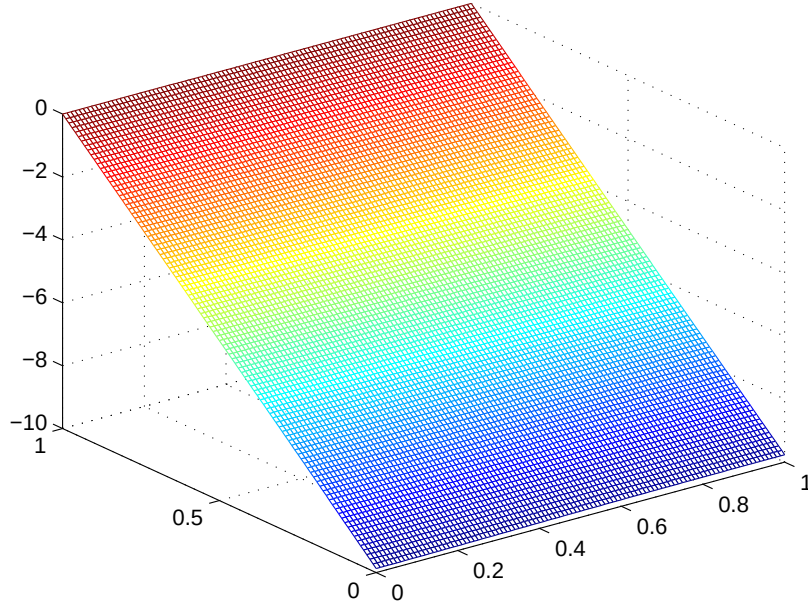
$$u_n = \frac{a_n \sigma \sinh(\pi n)}{\sigma + k_1 \pi^2 n^2} , \quad (10)$$

$$B_0 = \frac{(P_2 - P_1) \sigma \sqrt{k_1}}{\sqrt{\sigma} k_2 \cotgh(\sqrt{\sigma/k_1}) + \sigma \sqrt{k_1} + 2\sigma \sqrt{k_1} \sum_{n=1}^{\infty} u_n} , \quad (11)$$

$$u_0 = \frac{k_2 B_0}{\sqrt{k_1} \sqrt{\sigma} \sinh(\sqrt{\sigma/k_1})} . \quad (12)$$



Obrázek 1: $p_1(x, y)$



Obrázek 2: $p_2(x,y)$

4 Řešení pomocí diferenční metody

Popíšeme nyní řešení systému rovnic (1)-(6) pro neznámé funkce $p_1(x)$ a $p_2(x, y)$ na oblasti Ω_1 respektive na oblasti Ω_2 pomocí diferenční metody:

Ekvidistatní dělení intervalu $\langle a, b \rangle$ uzly $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, nazveme sítí, číslo $h > 0$ krokem sítě. Metodou sítě získáme přibližné hodnoty Y_i ($Y_i \cong y(x_i) = y_i$) ve vnitřních uzlech x_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$. V hraničních uzlech $x_0 = a$ a $x_n = b$ máme hodnoty y_0 a y_n (případně y'_0, y'_n) zadané okrajovou podmínkou. Hodnoty Y_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, získáme řešením tzv. soustavy síťových rovnic [3].

Výrazy pro první a druhé derivace pro dosazení do lineárních (síťových) rovnic získáme pomocí využití Taylorova polynomu:

První derivace $p_2(x, y)$ podle x :

$$p_2(x+h, y) = p_2(x, y) + \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} h + O(h^2)$$

$$p_2(x+h, y) - p_2(x, y) = \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} h + O(h^2)$$

$O(h^2)$ je zbylá část polynomu, kterou zanedbáme a dostaneme vztah:

$$\frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} \approx \frac{p_2(x+h, y) - p_2(x, y)}{h}$$

Obdobně dostaneme vztah pro první derivaci $p_2(x, y)$ podle y :

$$\frac{\partial p_2(x, y)}{\partial y} \approx \frac{p_2(x, y+h) - p_2(x, y)}{h}$$

Druhá derivace $p_2(x, y)$ podle x :

$$p_2(x + h, y) = p_2(x, y) + \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 p_2(x, y)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$p_2(x - h, y) = p_2(x, y) - \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial^2 p_2(x, y)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Rovnice spolu sečteme a zbytek polynomu $O(h^3)$ zanedbáme:

$$p_2(x + h, y) + p_2(x - h, y) \approx 2p_2(x, y) + \frac{\partial^2 p_2(x, y)}{\partial x^2} h^2$$

A dostaneme vztah:

$$\frac{\partial^2 p_2(x, y)}{\partial x^2} \approx \frac{p_2(x - h, y) - 2p_2(x, y) + p_2(x + h, y)}{h^2}$$

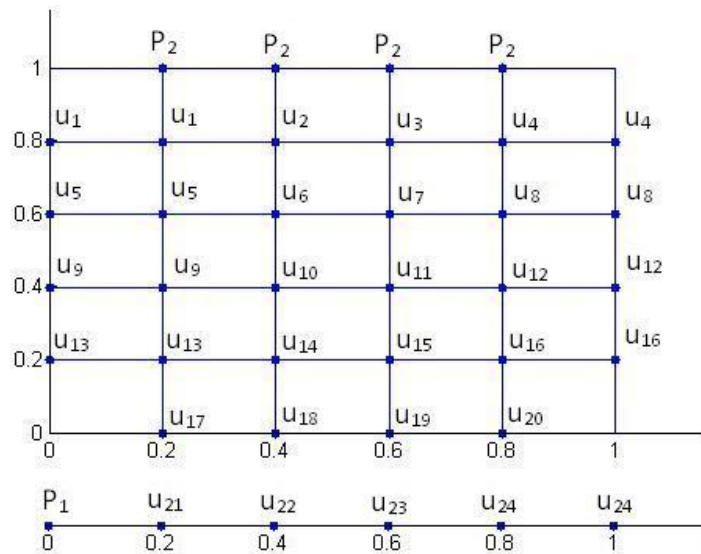
Obdobně dostaneme vztah pro druhou derivaci $p_2(x, y)$ podle y :

$$\frac{\partial^2 p_2(x, y)}{\partial y^2} \approx \frac{p_2(x, y - h) - 2p_2(x, y) + p_2(x, y + h)}{h^2}$$

A pro druhou derivaci $p_1(x)$:

$$p_1''(x) \approx \frac{p_1(x - h) - 2p_1(x) + p_1(x + h)}{h^2}$$

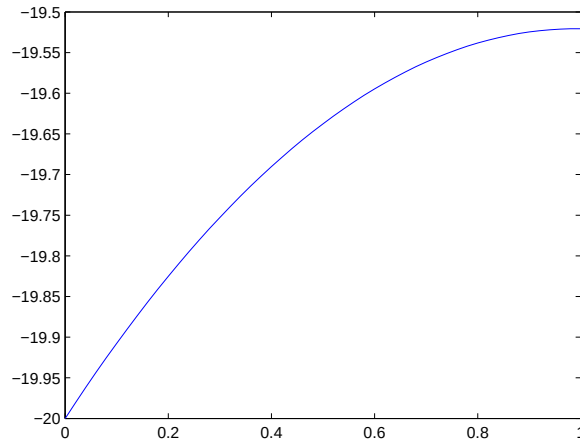
Vytvořením sítě vzniknou uzlové body, které s přihlédnutím k okrajovým podmínkám očíslovujeme podle obrázku (síť s krokem 0.2):



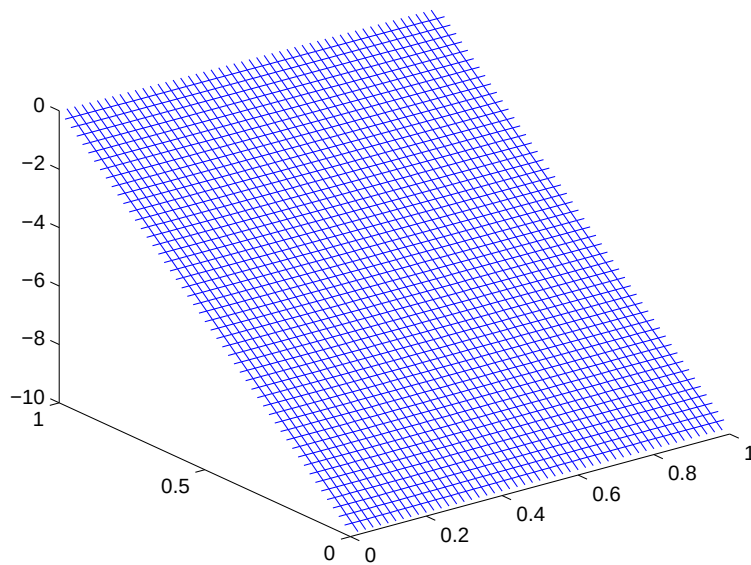
Předchozí vztahy aplikujeme na původní zadání a do každé rovnice dosadíme uzlové body. Tím nám vznikne soustava n lineárních rovnic pro n neznámých. Soustavu řešíme pomocí programu v Matlabu s nastavitelným krokem sítě.

5 Numerické výsledky

Řešení pro síť s krokem $h = 0.02$, a pro $k_1 = 10$, $k_2 = 1$, $P_1 = -20$, $P_2 = 0$ a $\sigma = 1$:



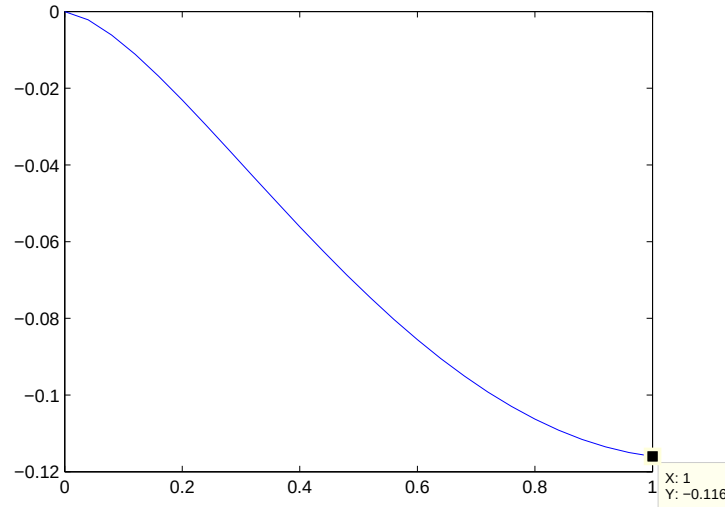
Obrázek 3: $p_1(x)$



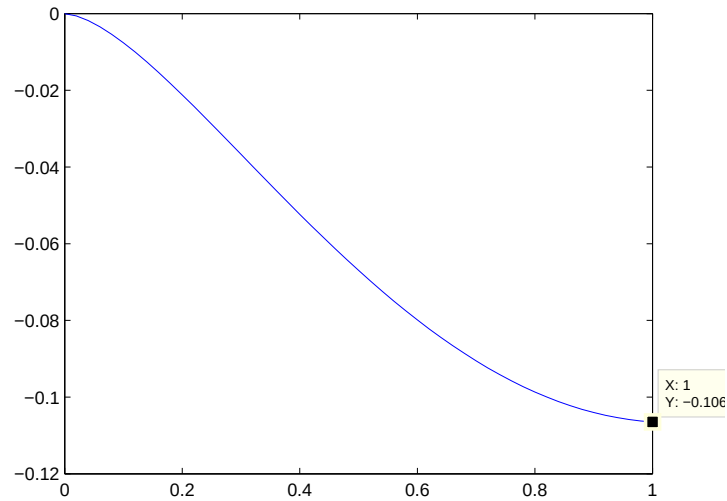
Obrázek 4: $p_2(x), y$

6 Závěr

Účelem bylo ověřit správnost řešení přes Fourierovy řady porovnáním s výpočtem přes metodu sítí. Proto spočítáme rozdílovou funkci pro $p_1(x)$ jako rozdíl funkčních hodnot přes metodu sítí minus funkční hodnoty přes Fourierovy řady (pro N členů rovnic (7), (8) a (11)):



Obrázek 5: Rozdílová funkce pro $p_1(x)$ s $N = 25$ a $h = 0,04$



Obrázek 6: Rozdílová funkce pro $p_1(x)$ s $N = 50$ a $h = 0,02$

Z grafu je vidět, že největší rozdíl je v bodě $x = 1$, a že se zmenšováním kroku sítě a se zvětšujícím počtem členů řady se rozdíl zmenšuje. Lze tedy usoudit, že je možno plně nahradit metodu sítí těmito vzorci. To je žádoucí vzhledem k menšímu počtu početních operací a ke spojitosti funkcí $p_1(x)$ a $p_2(x,y)$, což nám umožní získat hodnotu v kterémkoli bodě oblasti.

7 Literatura

- [1] C. ALBOIN, J. JAFFRÉ, J. E. ROBERTS, AND C. SERRES, *Domain decomposition for flow in fractured porous media*, jorstad, M. Cross, and O. B. Widlund, eds., Domain Decomposition Press, Bergen, Norway, 1999, pp. 365-373.
- [2] V. MARTIN, J. JAFFRÉ, AND J. E. ROBERTS, *Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media*, Siam J. Sci. Comput., 26, 2005, pp. 1667-1691.
- [3] J. BENDA, R. ČERNÁ, *Numerická matematika doplňkové skriptum*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2000.