

Návrh a analýza napětí kompozitní trubky pro zavěšení kola závodního vozu

Ing. Zdeněk Padovec, Ing. Michal Vašíček

Vedoucí práce: Prof. Ing. Milan Růžička, CSc.

Abstrakt

Práce se zabývá návrhem a analýzou kompozitní trubky pro zavěšení kola závodního vozu, která je namáhána osovým tahem (tlakem). Dále je zde popsán analytický návrh trubkového lepeného spoje kompozitní trubky a hliníkové koncovky z tuhostního, statického a únavového hlediska.

Klíčová slova

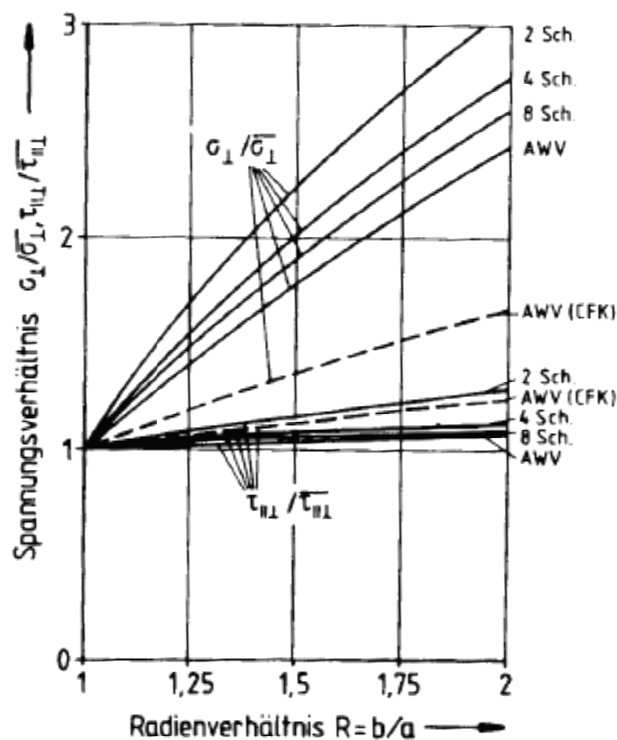
kompozit, lepený spoj, analytický návrh

1. Úvod

Letošní rok proběhne další ročník soutěže Formula Student a 3. rokem se ho zúčastní tým z ČVUT. Z důvodů úspory hmotnosti budou některé konstrukce zhotovené klasickým řešením z kovů nahrazovány konstrukcemi kompozitními. Jednou z nich je rameno zavěšení kola. To bude realizováno jako kompozitní a její spojení s ostatními částmi konstrukce bude realizováno přes hliníkovou koncovku, která bude k trubce přilepena.

2. Analytické řešení kompozitní trubky

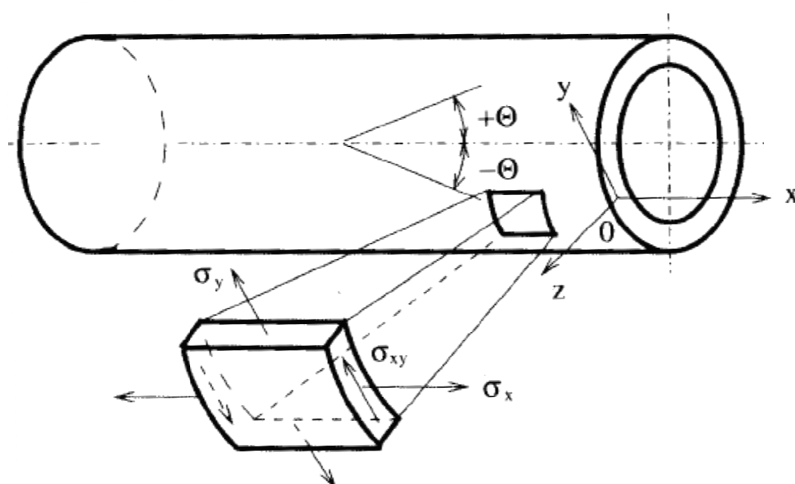
Vzhledem k malým rozměrům navrhované trubky a k poměrně vysokým zatížením dochází k situaci, že trubka je tlustostěnná ($R/h=3,1$; $D/d=1,38$). V případě izotropních tlustostěnných trubek při namáhání axiální silou je kontrakce ve směru radiálním stejná jako ve směru tangenciálním. Totéž platí pro případ, kdy je stěna trubky tvořena pouze jednosměrně axiálně uloženými vlákny, neboť materiál je transversálně izotropní v tangenciálním a radiálním směru. Pro případ složené stěny s úhlem vinutí $\pm\theta$, kde $\theta \neq 0^\circ$, jsou kontrakce v radiálním a tangenciálním směru rozdílné. Pro zvolený úhel (jak vyplyne z dalšího řešení) $\pm 10^\circ$ lze očekávat, že rozdíl v kontrakcích ve výše uvedených směrech nebude velký. Z rozboru uvedeného v práci [1], kde se porovnával výpočet platící pro tlustostěnnou a tenkostěnnou (všechna napětí nezávislá na radiální souřadnici) trubku s úhlem vinutí $\pm 20^\circ$ v závislosti na poměru D/d a počtu vrstev (Obr.2.1) je vidět, že rozdíly v napětí σ_r a τ_{LT} jsou malé. Napětí σ_L není vůbec vyneseno neboť rozdíly v těchto řešení, jsou ještě menší. Z tohoto důvodu bylo vycházeno z analýzy, které bylo prezentováno v [2] - řešení s konstantním napětím po tloušťce stěny a [3] - s lineárním gradientem napětí po tloušťce stěny, které platí pro poměr $R/h \geq 10$.



: Verhältnis der Schichtspannungen aus dickwandiger Rechnung zu denen aus dünnwandiger Rechnung bei einer Zug/Druck-Strebe (Faserrichtungswinkel $\alpha = \pm 70^\circ$ zur Umfangskoordinate) in Abhängigkeit vom Radienverhältnis R , variiert wurde die Schichtanzahl
 — GFK , ---- CFK

Obr.2.1 Závislost poměrů σ_T a τ_{LT} na poměru D/d a počtu vrstev pro sklený a uhlíkový kompozit[1]

V [2] je popsána analýza laminátové trubky, která je zatížena tahem (případně tlakem), vnitřním tlakem a krouticím momentem. Na obrázku 2.2 je vidět souřadnicový systém v kartézských souřadnicích s působením napětí ve stěně trubky.



Obr.2.2 Souřadný systém trubky [4].

Celkový krouticí moment M_k , kterým je trubka namáhána dán vztahem

$$M_k = 2\pi R(RN_{xy} + M_{xy}) = 2\pi R(RN_{xy} - B_{16}^*N_x - B_{26}^*Rp), \quad (2.1)$$

nebo

$$N_{xy} = K_1 N_x + K_2 R p + K_3 M_k, \quad (2.2)$$

kde

$$K_1 = \frac{B_{16}^*}{R}, K_2 = \frac{B_{26}^*}{R}, K_3 = \frac{1}{2\pi R^2} \quad (2.3)$$

Poměrná prodloužení mají tvar

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) N_x + (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) R p + A_{16}^* K_3 M_k \\ \varepsilon_y^0 &= (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) N_x + (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) R p + A_{26}^* K_3 M_k \\ \varepsilon_{xy}^0 &= (A_{16}^* + A_{66}^* K_1) N_x + (A_{26}^* + A_{66}^* K_2) R p + A_{66}^* K_3 M_k. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aplikací Hookeova zákona na rovnice (2.2), obdržíme pro k -tou vrstvu následující vztahy pro napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= [Q_{11}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{12}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{16}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{11}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{12}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{16}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] R p + \\ &+ [Q_{11}^{(k)} A_{16}^* + Q_{12}^{(k)} A_{26}^* + Q_{16}^{(k)} A_{66}^*] K_3 M_k \\ \sigma_y^{(k)} &= [Q_{12}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{22}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{26}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{12}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{22}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{26}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] R p + \\ &+ [Q_{12}^{(k)} A_{16}^* + Q_{22}^{(k)} A_{26}^* + Q_{26}^{(k)} A_{66}^*] K_3 M_k \\ \tau_{xy}^{(k)} &= [Q_{16}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{26}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{66}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{16}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{26}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{66}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] R p + \\ &+ [Q_{16}^{(k)} A_{16}^* + Q_{26}^{(k)} A_{26}^* + Q_{66}^{(k)} A_{66}^*] K_3 M_k. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pro axiální napětí ve stěně trubky platí

$$\sigma_x = \frac{F}{A}, \quad (2.6)$$

kde A je plocha mezikruží. Trubka stěny je tvořena symetrickou laminací s vyrovnanou symetrickou skladbou (vzhledem k tomuto faktu se zjednoduší i rovnice (2.5)), tzn. tuhost celé stěny Q_{ij} , kde $i, j = (1, 2, 6)$ odpovídají směřům x, y trubky. Prvky matice Q_{ij} vyplynou z transformačních vztahů pro konkrétní úhel vinutí a ze znalosti prvků matice tuhosti jednotlivé laminy ve směru os její materiálové symetrie (L, T). Ze symetrie a vyváženosti plyne $Q_{16} = Q_{61} = Q_{26} = Q_{62} = 0$. Hookeův zákon pro celou stěnu má tvar

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Inverzí těchto vztahů obdržíme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

kde $S_{ij} = Q_{ij}^{-1}$ a $i, j = (1, 2, 6)$. Jelikož je zatížení trubky pouze osovou silou vyvolávající napětí σ_x , tj. $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, budou deformace

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= S_{11} \sigma_x + S_{12} \sigma_y \\ \varepsilon_y &= S_{21} \sigma_x + S_{22} \sigma_y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Poměrná přetvoření v jednotlivých laminách stěny ve směrech materiálových os ortotropie se získá transformací

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \frac{1}{2} \gamma_{LT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

které v našem případě přejdou do tvaru

$$\begin{aligned}
\varepsilon_L &= \cos^2 \theta \varepsilon_x + \sin^2 \theta \varepsilon_y \\
\varepsilon_T &= \sin^2 \theta \varepsilon_x + \cos^2 \theta \varepsilon_y \\
\gamma_{LT} &= 2[(-\cos \theta \sin \theta) \varepsilon_x + (\cos \theta \sin \theta) \varepsilon_y].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Napětí v jednotlivých laminách vyplynou z Hookeova zákona pro jednoduchou laminu v osách její ortotropie

$$\begin{aligned}
\sigma_L &= Q_{LL} \varepsilon_L + Q_{LT} \varepsilon_T \\
\sigma_T &= Q_{TL} \varepsilon_L + Q_{TT} \varepsilon_T \\
\tau_{LT} &= Q_{SS} \gamma_{LT},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Tato teorie platí však jen pro případ tenkostěnných skořepin.

V našem případě, jak bude uvedeno dále, je však konstrukce vzhledem k svým malým rozměrům střední tloušťky. V literatuře [3] byl nalezen postup, který umožňuje vypočítat gradient napětí po tloušťce stěny, v závislosti na souřadnici z . Pro náš případ (zatížení pouze tahem/tlakem) uvedeme rovnice ve zjednodušené formě

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(k)} &= [Q_{11}^{(k)} \overline{S_{11}} + Q_{12}^{(k)} \overline{S_{21}}] N_x + \frac{z}{R} [(Q_{16}^{(k)} \overline{S_{61}} - Q_{12}^{(k)} \overline{S_{21}}) N_x] \\
\sigma_y^{(k)} &= [Q_{12}^{(k)} \overline{S_{11}} + Q_{22}^{(k)} \overline{S_{21}}] N_x + \frac{z}{R} [(Q_{26}^{(k)} \overline{S_{61}} - Q_{22}^{(k)} \overline{S_{21}}) N_x] \\
\tau_{xy}^{(k)} &= [Q_{16}^{(k)} \overline{S_{11}} + Q_{26}^{(k)} \overline{S_{21}}] N_x + \frac{z}{R} [(Q_{66}^{(k)} \overline{S_{61}} - Q_{62}^{(k)} \overline{S_{21}}) N_x].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Z rovnic je zřejmé, že pokud $z=0$, budou tyto rovnice stejné jako (2.5).

3. Kontrola pevnosti laminy a ztráta stability

Existuje celá řada kritérií statické pevnosti pro vrstvené lamináty. Dělí se na neinteraktivní, tj. jednotlivé složky napětí a pevnosti spolu nejsou svázány a na interaktivní, kde mezní plocha je vyjádřena jedinou rovnicí. Bez znalosti experimentálního chování konkrétní struktury nelze předem odhadnout, které kritérium je vhodné použít. Statická kritéria pevnosti jsou poté často modifikována i pro vznik únavového poškození. Z mnoha pevnostních kritérií porušení laminy volíme kritérium maximálního napětí (např. [4]), protože patří mezi nejčastěji používaná.

$$\begin{aligned}
-F_{Lc} &< \sigma_L < F_{Lt} \\
-F_{Tc} &< \sigma_T < F_{Tt} \\
-F_{LT} &< \tau_{LT} < F_{LT}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Zvolené kritérium je neinteraktivní. První rovnice vyjadřuje porušení vlákna tahem nebo tlakem. Druhá a třetí rovnice vyjadřují mezivláknovou poruchu. Rozhodující je minimální součinitel bezpečnosti k , který je dán poměrem příslušné pevnosti k napětí v tomto směru pro provozní zatížení. Součinitel bezpečnosti k lze vyjádřit například

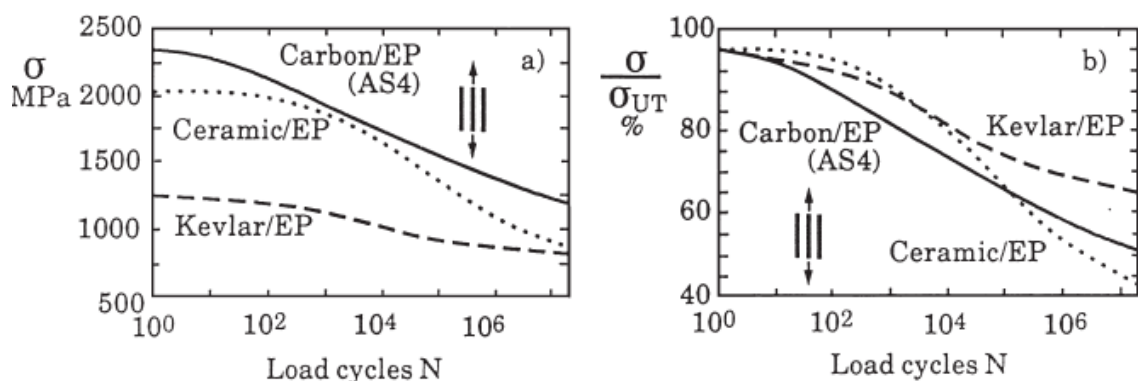
$$k = \frac{F_{Tt}}{\sigma_T} \geq 2. \tag{3.2}$$

V případě tlakového zatížení je nutné provést ještě kontrolu na ztrátu stability. Trubka je uložena ve dvou kloubech, což odpovídá II. případu vzpěru, takže kritická síla pro ztrátu stability v Eulerově oblasti má pro tento případ tvar

$$F_{kr}^{II} = \pi^2 \frac{E_x J_{zmin}}{l^2}. \tag{3.3}$$

4. Únavová pevnost a životnost

Při zjišťování únavové pevnosti bylo vycházeno z obrázku 4.1, který zobrazuje S-N křivky pro různé typy vláken a stejnou epoxidovou matici (nás bude zajímat S-N křivka pro kombinaci uhlíkového vlákna a epoxidové matrice). Na obrázku sou vidět jak absolutní hodnoty, tak i relativní hodnoty vztažené k mezi pevnosti.



Obr.4.1 S-N křivky pro jednosměrný kompozit pro různé typy vláken a stejnou epoxidovou matrici a) absolutní hodnoty, b) relativní hodnoty vztažené k mezi pevnosti [8]

5. Vlastní kontrola a návrh hřídele

Byla zvolena varianta vinuté trubky o 4 vrstvách se skladbou $(\pm 10)_s$. Navrhujeme složení kompozitní trubky podle výrobního sortimentu potencionálního výrobce (CompoTech): uhlíkové vlákno T600 (jedná se o vysokopevnostní vlákna, výrobce Thomy) a epoxidová matrice EP k24. Vlastnosti složek jsou:

Tabulka 5.1. – Vlastnosti vlákna matrice a laminy

$E_{fl}[\text{MPa}]$	230000	$E_m[\text{MPa}]$	4500
$E_{ft}[\text{MPa}]$	15000	$G_m[\text{MPa}]$	1600
$G_f[\text{MPa}]$	50000	$\nu_m[-]$	0,4
$\nu_f[-]$	0,3	$V_f[\%]$	65
$E_L[\text{MPa}]$	151075	$F_{Lt}[\text{MPa}]$	1200
$E_T[\text{MPa}]$	8257	$F_{Lc}[\text{MPa}]$	600
$G_{LT}[\text{MPa}]$	4315	$F_{Tt}[\text{MPa}]$	45
$\nu_{LT}[-]$	0,335	$F_{Tc}[\text{MPa}]$	145
$\nu_{TT}[-]$	0,018	$F_{LT}[\text{MPa}]$	65

Stěna je složena ze čtyř vrstev a má tloušťku $t=2,8$ mm. Prvky matice Q_{ij} získáme pomocí programu LamiEx v.3.1. Vlastnosti celého kompozitu jsou vidět v tabulce 6.2

Tabulka 5.2. – Vlastnosti kompozitu

$E_x[\text{MPa}]$	138 283
$E_y[\text{MPa}]$	8 297,9
$G_{xy}[\text{MPa}]$	8 335,8
$\nu_{xy}[-]$	0,7893
$\nu_{yx}[-]$	0,0474

Vnitřní průměr $d=14,4$ mm, vnější $D=20$ mm. Délka trubky je 255 mm. Maximální osová síla, kterou je trubka zatěžována je tlaková a má hodnotu -3970 N. Z programu LamiEx dostaneme hodnoty matic Q , A^* a B^* .

$$Q = \begin{bmatrix} 152007 & 2783,1 & 0 \\ 2783,1 & 8307,8 & 0 \\ 0 & 0 & 4315 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0,0258 & -0,0204 & 0 \\ -0,0204 & 0,4304 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4284 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Matice B^* je vzhledem symetrie nulová. Jednotková síla $N_x = -\frac{3970}{\pi 20}$. Z rovnic (2.3) z důvodu nulové matice B^* zbude jen vztah pro $K_3 = \frac{1}{2\pi 20^2}$ a rovnice (2.5) se zjednoduší do tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= [Q_{11}^{(k)} A_{11}^* + Q_{12}^{(k)} A_{12}^*] N_x \\ \sigma_y^{(k)} &= [Q_{12}^{(k)} A_{11}^* + Q_{22}^{(k)} A_{12}^*] N_x \\ \tau_{xy}^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

Tyto hodnoty napětí dosadíme do rovnic (2.7-2.12) a porovnáme s hodnotami pevnosti. Pro vrstvu s úhlem návinu 10° bude

$$\begin{aligned} \sigma_L &= -53,9 \text{ MPa} \\ \sigma_T &= 1,3 \text{ MPa} \\ \tau_{LT} &= 0,5 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

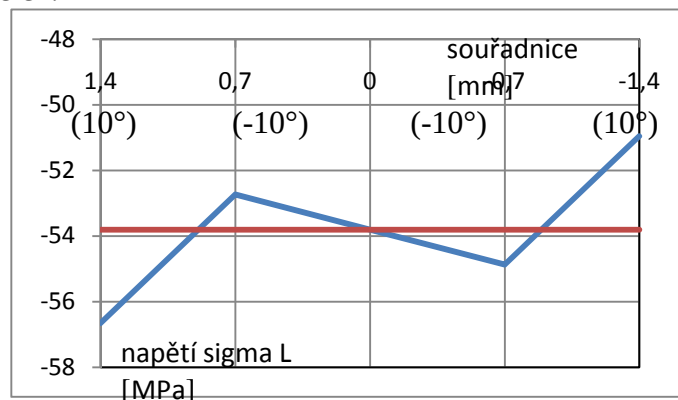
Pro vrstvu s úhlem návinu -10° bude

$$\begin{aligned} \sigma_L &= -53,9 \text{ MPa} \\ \sigma_T &= 1,3 \text{ MPa} \\ \tau_{LT} &= -0,5 \text{ MPa.} \end{aligned}$$

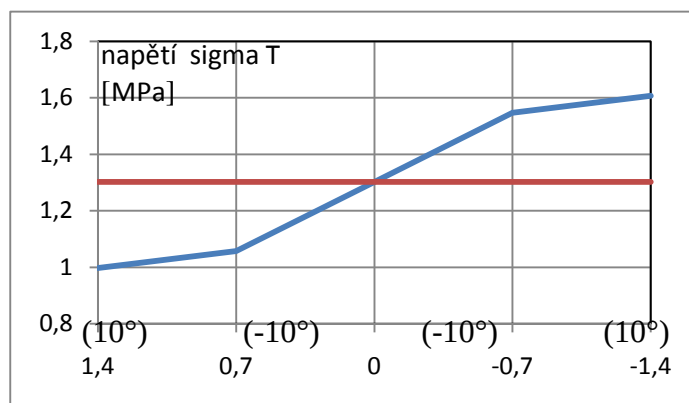
Součinitel bezpečnosti k_p je minimální pro poměr tlakové pevnosti podél vláken k příslušnému napětí v daném směru

$$k_p = \frac{600}{53,9} = 11,13.$$

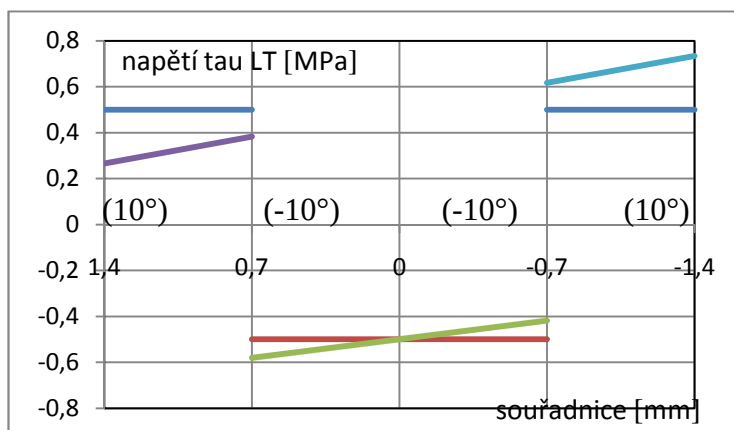
Použitím rovnic (2.7-2.12) získáme průběhy napětí po tloušťce stěny, které jsou vidět na následujících obrázcích.



Obr.5.1 Průběh napětí σ_L po tloušťce stěny



Obr.5.2 Průběh napětí σ_T po tloušťce stěny



Obr.5.3 Průběh napětí τ_{LT} po tloušťce stěny

Z grafů je vidět, že dimenzování na střední napětí je dostačující (bezpečnost 11,13).

Kritická síla má pro trubku daných rozměrů dle rovnice (3.3) velikost

$$F_{kr}^{II} = 12055 \text{ N.}$$

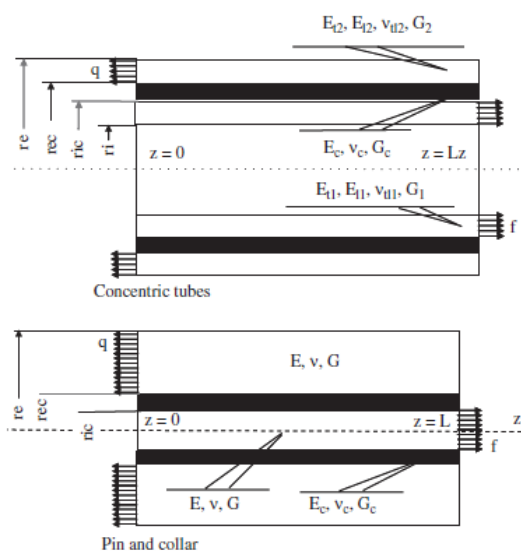
Součinitel bezpečnosti k_v je dán poměrem kritické síly a zatěžovací síly a je roven

$$k_v = \frac{12055}{3970} = 3,03.$$

Vzhledem k tomu, že zatěžovací síla stanovená ze statických poměrů v kontaktu pneumatika – vozovka, je pro účely výpočtu zvětšená součinitelem dynamické bezpečnosti, předpokládáme, že je hodnota součinitele bezpečnosti ve vzpěru dostatečná (část bezpečnosti je zahrnuta právě v součiniteli dynamické bezpečnosti).

6. Lepený spoj

V předchozí části byl popsán postup, jak navrhnout kompozitní trubku namáhanou tahem (případně tlakem). Nyní se budeme zabývat spojením kompozitní trubky s hliníkovou koncovkou. Trubkový spoj namáhaný osovou silou je znázorněn na obrázku 6.1, kde je popsána i jeho geometrie.



Obr.6.1 Trubkový lepený spoj trubka/trubka, trubkový lepený spoj tyč/trubka [5]

Výpočet průběhu smykového napětí v lepidle vychází z principu minima potenciální energie a aplikací okrajových podmínek (například [5], [6] a [7]). Postup řešení je následující

- zkonstruování akceptovatelného statického pole
- výpočet potenciální energie pro takové statické pole

- minimalizace potenciální energie pomocí variační metody
- řešení obdržené diferenciální rovnice

Dále je nutné znát mechanické vlastnosti materiálu trubky, ocelové koncovky a lepidla (E , G , ν) a rozměry. Pro konstrukci pole vyjdeme z následujících předpokladů

- radiální napětí ve všech třech částech konstrukce $\sigma_{rr}^{(i)} = 0$
- rotační symetrie způsobí, že smykové napětí $\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0$
- napětí v lepidle $\sigma_{zz}^L = 0$
- osově napětí je funkcí jen osově proměnné z

Pro ocelovou koncovku bude platit

$$\tau_{rz}^K = \frac{(-r^2)}{2r} \frac{d\sigma_{zz}^K}{dz} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^K = \frac{(-r^2)}{2} \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2}. \quad (6.2)$$

Pro lepidlo bude platit

$$\tau_{rz}^L = \frac{(-r_{il}^2)}{2r} \frac{d\sigma_{zz}^K}{dz} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^L = \frac{(-r_{il}^2)}{2} \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} \quad (6.4)$$

Pro kompozitní trubku bude platit

$$\tau_{rz}^T = \frac{(r_e^2 - r^2)r_{il}^2}{2r(r_{ec}^2 - r_e^2)} \frac{d\sigma_{zz}^K}{dz} \quad (6.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^T = \frac{(r_e^2 - r^2)r_{il}^2}{2(r_{ec}^2 - r_e^2)} \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} \quad (6.6)$$

Potenciální energii soustavy můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \xi_p = \xi_p^K + \xi_p^L + \xi_p^T = \pi \int_0^L \left\{ \int_0^{r_{il}} \left[\frac{(\sigma_{\theta\theta}^K)^2}{E_K} + \frac{(\sigma_{zz}^K)^2}{E_K} - \frac{2\nu_K}{E_K} \sigma_{zz}^K \sigma_{\theta\theta}^K + \frac{1}{G_K} (\tau_{rz}^L)^2 \right] r dr \right\} dz + \\ \pi \int_0^L \left\{ \int_{r_{il}}^{r_{el}} \frac{1}{E_l} \left[(\sigma_{\theta\theta}^L)^2 + 2(1 + \nu_l)(\tau_{rz}^L)^2 \right] r dr \right\} dz + \\ \pi \int_0^L \left\{ \int_{r_{el}}^{r_e} \left[\frac{(\sigma_{\theta\theta}^T)^2}{E_x} + \frac{(\sigma_{zz}^T)^2}{E_y} - \frac{2\nu_{yx}}{E_y} \sigma_{zz}^T \sigma_{\theta\theta}^T + \frac{1}{G_{xy}} (\tau_{rz}^T)^2 \right] r dr \right\} dz \end{aligned} \quad (6.7)$$

Po integraci přes poloměr r a dosazením vztahů pro jednotlivá napětí dostaneme vztah pro potenciální energii ve tvaru

$$\xi_p = \pi \int_0^L \left[A(\sigma_{zz}^K)^2 + B\sigma_{zz}^K \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} + C \left(\frac{d\sigma_{zz}^K}{dz} \right)^2 + D\sigma_{zz}^K + H \left(\frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} \right)^2 + F \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} + K \right] dz, \quad (6.8)$$

kde A , B , C , D , H , F a K jsou známé konstanty závislé na zatížení, mechanických vlastnostech a rozměrech. Použitím variační metody s cílem minimalizovat potenciální energii získáme diferenciální rovnici

$$H \frac{d^4\sigma_{zz}^K}{dz^4} + (B - C) \frac{d^2\sigma_{zz}^K}{dz^2} + A\sigma_{zz}^K + \frac{D}{2} = 0, \quad (6.9)$$

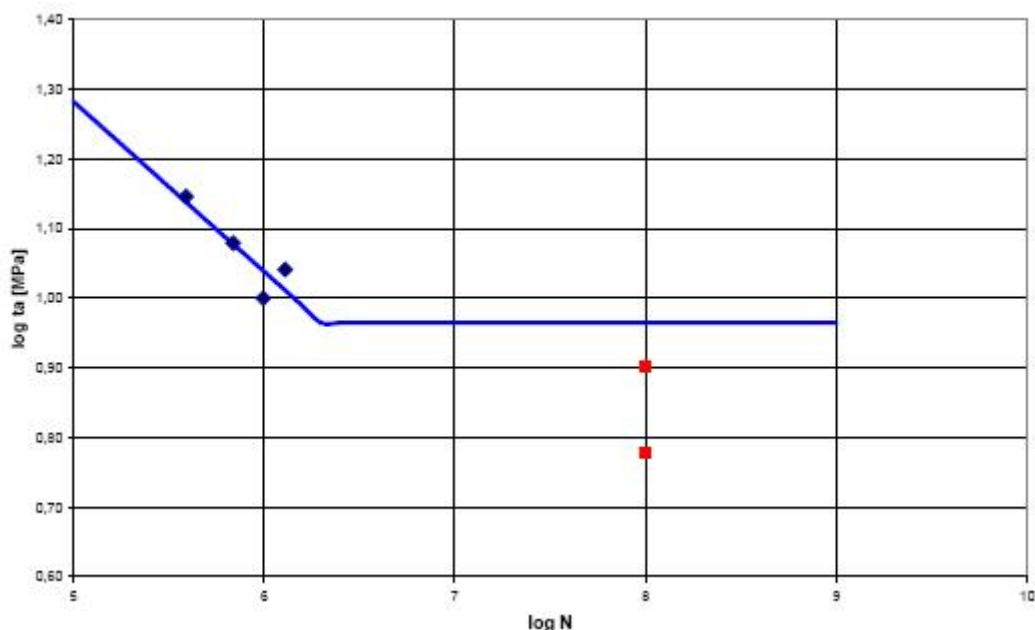
kterou jsme schopni numericky řešit. Získáme-li průběh σ_{zz}^K , bude pak možno vyřešit i ostatní složky napětí soustavy a z jejich průběhu spočítat i střední hodnotu napětí, na kterou budeme dimenzovat spoj. Dále ještě zavedeme koeficient poměrné délky.

$$\lambda_T = \frac{l_l}{D}. \quad (6.10)$$

7. Únavová pevnost lepeného spoje

Z literatury [9] a [10] vezmeme Wöhlerovu křivku (obrázek 7.1) a z počtu cyklů pro náš případ určíme mez únavy lepeného spoje. Křivka byla získána pro trubkový spoj namáhaný krouticím momentem, což ale v principu nevadí, jelikož v našem případě dochází taktéž ke smykovému namáhání. Experiment, z kterého byla určena Wöhlerova křivka, byl proveden na

trubkovém lepeném spoji, kdy délka spoje byla 15 mm a tloušťka vrstvy lepidla byla 0,8 mm. Vnitřní průměr zkoušené trubky byl 18 mm, tzn. $\lambda_T = 83\%$.



Obr. 7.1 Únavová křivka trubkového lepeného spoje [9]

Na šikmou větev S-N křivky aplikujeme lineární regresi a dostaneme

$$w \log \tau_a + \log N = \log C$$

$$\tau_a^w N = C. \quad (7.1)$$

Dle výsledků uvedených v [9] a [10] vyplývá, že sklon křivky je dán exponentem $w=4,09$. Pro zadaný počet cyklů 10^6 odečteme hodnotu $\log 1,04$. Po algebraické úpravě dostáváme hodnotu meze únavy pro náš případ rovnu cca 11 MPa.

8. Vlastní návrh lepeného spoje

V kapitole 5 byla analyticky navržena kompozitní trubka. Nyní se budeme zabývat návrhem lepeného spoje, to znamená jeho délkou, tloušťkou a výpočtem napětí. K vhodnému návrhu spoje nám pomohou empirická kritéria:

$$t_l = 0,4 \div 0,8 \text{ mm}$$

$$\lambda_T = 60 - 80\%.$$

Pro spojení hliníkové koncovky a kompozitní trubky navrhujeme použít dvousložkové lepidlo firmy SP Systems s označením SPABOND 345, které má následující mechanické vlastnosti: $E=1300 \text{ MPa}$, $G=890 \text{ MPa}$, $\nu=0,41$. Rozměry ocelové koncovky jsou částečně závislé na kompozitní trubce a tloušťce vrstvy lepidla. Průměr koncovky v místě lepeného spoje d_k je závislý na tloušťce lepidla a je definován rozdílem vnitřního průměru trubky d a dvojnásobku tloušťky lepidla t_l .

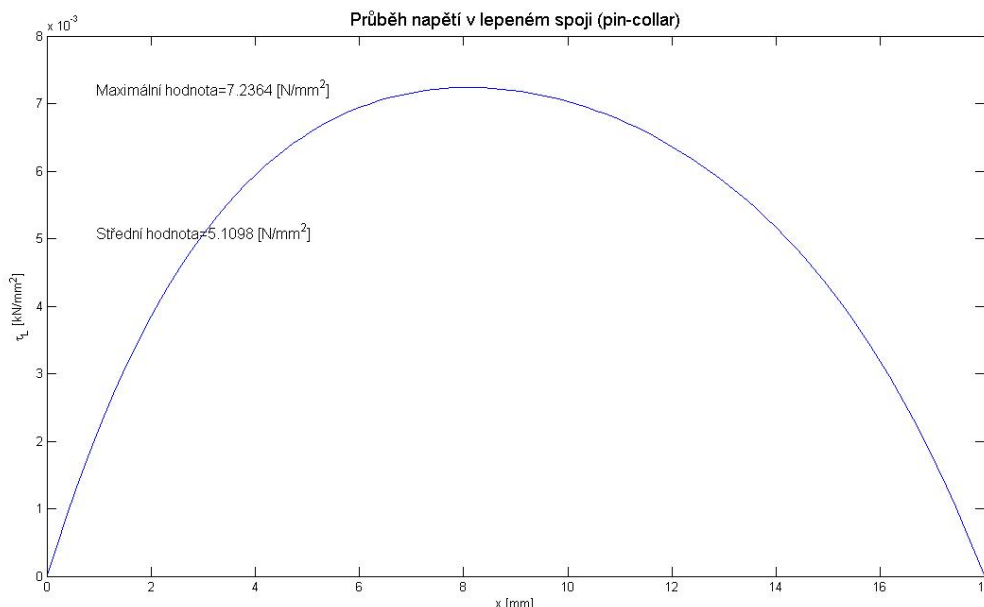
$$d_k = d - 2t_l. \quad (8.1)$$

Ocelová koncovka bude zhotovená ze slitiny hliníku EN AW-7075 a má následující mechanické vlastnosti: $E=70 \text{ GPa}$, $G=26,3 \text{ GPa}$, $\nu=0,33$. Mechanické vlastnosti kompozitní trubky jsou popsány v kapitole 5.

Tloušťku lepidla zvolíme $t_l=0,4 \text{ mm}$ a délku lepeného spoje $L_l=18 \text{ mm}$. Průměr koncovky lepeného spoje bude pak podle (8.1) $d_k = 13,6 \text{ mm}$. Rovnici (6.10) jsme vyřešili v programu Matlab a výsledky jsou zobrazeny na obrázku 8.1. Na něm je vidět průběh smykového napětí v trubkovém spoji namáhaném na tah/tlak, včetně vyčíslené maximální a střední hodnoty

smykového napětí. Maximální hodnota smykového napětí je $\tau_{L\max} = 7,24$ MPa a střední hodnota na kterou spoj dimenzujeme je $\tau_L = 5,11$ MPa. Koeficient bezpečnosti lepeného spoje vypočteme jako poměr dovoleného napětí, které je odečteno z Wöhlerovy křivky a provozního středního napětí získaného z programu sestaveného v prostředí Matlab.

$$k_v = \frac{11}{5,11} = 2,15.$$



Obr.8.1 Průběh smykového napětí v trubkovém lepeném spoji namáhaném na tah/tlak

9. Závěr

Pomocí klasické laminační teorie ve spojení s teorií tenkostěnných skořepin (Donnell) a teorií skořepin se zahrnutím lineárního gradientu napětí (Vlasov-Ambarcumjan) byla navržena kompozitní trubka pro namáhání tah/tlak. Byla provedena pevnostní kontrola s ohledem na únavovou životnost a kontrola na ztrátu stability a bylo dosaženo vyhovujících koeficientů bezpečnosti. Použitím variační metody na minimalizování potenciální energie byl navržen trubkový lepený spoj mezi kompozitní trubkou a hliníkovou tyčí a stanoven průběh smykového napětí ve spoji v závislosti na jeho délce. Z tohoto průběhu byla určena maximální a střední hodnota smykového napětí, která byla porovnána s mezí únavy pro zadaný počet cyklů, přičemž bylo dosaženo vyhovující bezpečnosti. Dalším krokem bude vytvoření MKP modelu, kde budou pro modelování lepidla použity kohezivní prvky a experimentální program na skutečných trubkových vzorcích.

Seznam symbolů

A	plocha mezikruží	[mm]
A	matice tahové tuhosti	[Nmm ⁻¹]
B	matice vazební tuhosti	[N]
D	matice ohybové tuhosti	[Nmm]
D	vnější průměr trubky	[mm]
E_x	modul pružnosti v podélném směru	[MPa]
E_y	modul pružnosti v příčném směru	[MPa]
E_{fl}	modul pružnosti vlákna v podélném směru	[MPa]

E_{fT}	modul pružnosti vlákna v příčném směru	[MPa]
E_k	modul pružnosti hliníkové koncovky	[MPa]
E_L	modul pružnosti laminy ve směru vláken	[MPa]
E_l	modul pružnosti lepidla	[MPa]
E_T	modul pružnosti vlákna kolmo na vlákna	[MPa]
F	osová síla	[N]
F_{kr}	kritická síla	[N]
F_{Lc}	pevnost v tlaku ve směru vláken	[MPa]
F_{Lt}	pevnost v tahu ve směru vláken	[MPa]
F_{Tc}	pevnost v tlaku kolmo k vláknům	[MPa]
F_{Tc}	pevnost v tahu kolmo k vláknům	[MPa]
F_{LT}	pevnost v interlaminárním smyku	[MPa]
G_f	modul pružnosti vlákna ve smyku	[MPa]
G_m	modul pružnosti matrice ve smyku	[MPa]
G_{LT}	modul pružnosti laminy ve smyku	[MPa]
G_{xy}	modul pružnosti kompozitu ve smyku	[MPa]
G_k	modul pružnosti hliníkové koncovky ve smyku	[MPa]
L_l	délka lepeného spoje	[mm]
N	počet cyklů	[MPa]
N_x	jednotková síla ve směru x	[N]
Q	matice mimoosové tuhosti	[MPa]
R	střední poloměr trubky	[mm]
S	matice mimoosové poddajnosti	[MPa]
V_f	objemový podíl vláken	[%]
d	vnitřní průměr trubky	[mm]
d_k	průměr hliníkové koncovky	[mm]
l	délka trubky	[mm]
t_l	tloušťka lepidla	[mm]
z	souřadnice měřená od neutrálné osy	[mm]
ν_f	Poissonovo číslo vlákna	[-]
ν_k	Poissonovo číslo hliníkové koncovky	[-]
ν_l	Poissonovo číslo lepidla	[-]
ν_m	Poissonovo číslo matrice	[-]
ν_m	Poissonovo číslo matrice	[-]
ν_{LT}	Poissonovo číslo laminy	[-]
ν_{TL}	Poissonovo číslo laminy	[-]
ν_{xy}	Poissonovo číslo kompozitu	[-]
ν_{yx}	Poissonovo číslo kompozitu	[-]
λ_t	poměrný koeficient délky	[-]
σ_L	normálové napětí ve směru vláken	[MPa]
σ_T	normálové kolmo na vlákna	[MPa]
τ_{LT}	smykové napětí	[MPa]
τ_{Lmax}	maximální smykové napětí v lepidle	[MPa]
τ_s	střední smykové napětí v lepidle	[MPa]
θ	úhel vinutí	[°]

Seznam použité literatury

- [1] Jakobi, R.: Zur Spannungs-Verformungs und Bruchanalyse an dickwandigen rohrförmigen Bauteilen aus Faser-Kunststoff-Verbunden, VDI Verlag, Düsseldorf, 1987
- [2] Whitney, J.M., Halpin, J.C.: Analysis of Laminated Anisotropic Tubes Under Combined Loading, *Journal of Composite Materials*, Vol.2, No.3, 1968, pp. 360-367.
- [3] Whitney, J.M., Pagano, N.J., Pipes, R.B.: Design and Fabrication of Tubular Specimens for Composite Characterization, *Composite Materials: Testing and Design* (Second Conference), Anaheim, California, 20-22 April, 1971.
- [4] Laš, V.: Mechanika kompozitních materiálů, ZČU Plzeň, Plzeň, 2008.
- [5] Kumar, S.: Analysis of tubular adhesive joints with a functionally modulus graded bondline subjected to axial loads, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol. 29, 2009, pp. 785-795.
- [6] Martínez, M.A., Velasco, F., Abenojar, J., Pantoja, M., Del Real, J.C.: Analytical solution to calculate the stress distribution in pin-and-collar samples bonded with anaerobic adhesives (following ISO 10123 standard), *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol.28, 2008, pp. 405-410.
- [7] Nemes, O., Lachaud, F., Mojtabi, A.: Contribution to the study of cylindrical adhesive joining, *International Journal of Adhesion & Adhesives*, Vol.26, 2006, pp. 474-480.
- [8] Hartwig, G., Hubner, R., Knaak, S., Pannkoke, C.: Fatigue behaviour of composites, *Cryogenics*, Vol.38, 1998, pp. 75-78.
- [9] Sedláček, R.: Návrh a experimentální ověření nových řešení spojů kompozitních a kovových dílů v rotačních pohonech dopravních a zemědělských strojů, Dizertační práce, Praha, 2005.
- [10] Sedláček, R.: Lepené spoje, <http://kompozity.info>.