

Analýza cyklické plasticity v zámku lopatky – Identifikace parametrů Chabocheova modelu zpevnění

Slavomír Parma

Vedoucí práce: Ing. Zbyněk Hrubý

Abstrakt

Při přechodu parní turbíny z režimu odstávky do pracovního režimu dojde vlivem setrvačných (odstředivých) sil k zatížení spoje rotoru a lopatky – zámku. Zatížení generuje v zámku pole napětí, které se vzhledem k „složitě“ geometrii vyznačuje velkými gradienty a souvisejícími velkými extrémy. Tyto mohou vést k místní plastické deformaci materiálu. Pro teoretické řešení distribuce napětí je v takovém případě model hookeovského materiálu nedostačující. Jednou z možností je použití Chabocheova modelu kinematického zpevnění materiálu. Práce se zabývá identifikací parametrů tohoto modelu s ohledem na cyklický charakter zatížení.

Klíčová slova

plasticita, Chabocheův model, identifikace, turbína

1 Úvod

Řada technických materiálů, oceli nevyjímaje, v oblasti elastické deformace vykazuje lineární závislost mezi napětím a deformací. Konstitutivní rovnice popisující toto chování je známa jako *Hookeův zákon*. U tvarově složitých těles, která jsou intenzivně namáhána, se obvykle nevyhneme špičkám napětí, které v daném místě či oblasti vedou k plastické deformaci materiálu. Dojde-li v dané oblasti k plastické deformaci, pro popis chování materiálu v této oblasti je použití Hookeova zákona nekorektní, protože nejsou splněny předpoklady jeho platnosti.

Plastickou deformací materiálu se zabývá *teorie plasticity*. Zcela zásadní význam v této teorii má jev *zpevnění*, kterým obecně nazýváme závislost meze kluzu na historii plastické deformace materiálu. Existuje poměrně velké množství modelů zpevnění postavených na různých teoriích. Reálné chování materiálu velmi dobře popisuje *Chabocheův model kinematického zpevnění*. Jeho výhoda spočívá v možnosti volby počtu parametrů modelu, což umožňuje dobrou aproximaci.

Jedním z výše popsáných případů, kdy je obtížné vyhnout se částečné plastizaci materiálu, je konstrukce zámku lopatky parní turbíny. Zatížení je způsobeno odstředivými silami, které působí za provozu na lopatku. Toto zatížení je extrémní a v zámku může způsobit plastickou deformaci. Protože turbína během svého života přechází mezi provozním režimem a režimem odstávky, má navíc zatěžování cyklický charakter.

V této práci analyzujeme Chabocheův model a ukážeme některé jeho vlastnosti. Dále se zaměříme na identifikaci parametrů tohoto modelu s využitím *cyklické deformační křivky (CDK)*. Za tímto účelem provedeme virtuální experiment, jehož výsledek komparujeme s experimentem reálným. Použití získaného modelu materiálu demonstrujeme na řešení zkušebního modelu zámku lopatky parní turbíny. Řešení bude vzhledem povaze úlohy – obecná geometrie, cyklické zatěžování, nelineární model materiálu – provedeno pomocí *metody konečných prvků (MKP)*.

2 Chabocheův model kinematického zpevnění

V následujícím oddíle je definován Chabocheův model, je ukázán tvar modelu pro jednoosou napjatost. Následuje analýza modelu a řešení pro obecnou funkci zatěžování.

2.1 Definice Chabocheova modelu

Autorem modelu je *Jean-Louis Chaboche*. Tenzor kinematických parametrů (*backstress*) α definuje vztahem

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)}, \quad (1)$$

kde tenzory $\alpha^{(i)}$ jsou dány vztahy

$$\dot{\alpha}^{(i)} = \frac{2}{3} H^{(i)} \dot{\epsilon}^{pl} - \gamma^{(i)} \alpha^{(i)} \dot{\bar{\epsilon}}^{pl} \quad (2)$$

a příslušnými počátečními podmínkami. $H^{(i)}$ a $\gamma^{(i)}$ jsou materiálové konstanty, člen ϵ^{pl} je *tenzor plastické deformace* a $\bar{\epsilon}^{pl}$ je *akumulovaná efektivní plastická deformace*, která je dána vztahem

$$\bar{\epsilon}^{pl} = \int_0^t \dot{\epsilon}_{ef}^{pl} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl} \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}} dt. \quad (3)$$

Daný materiál je tedy popsán $2N$ parametry, které je třeba získat z experimentálních dat.

2.2 Chabocheův model pro jednoosou napjatost

Pro případ jednoosé napjatosti lze rovnice (1) a (2) přepsat [3] jako

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)}, \quad \dot{\alpha}^{(i)} = H^{(i)} \dot{\epsilon}^{pl} - \gamma^{(i)} \alpha^{(i)} \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}, \quad (4)$$

kde $\alpha(t)$ a $\alpha^{(i)}(t)$ jsou neznámé funkce, $\epsilon^{pl}(t)$ je *plastická deformace* a $\bar{\epsilon}^{pl}(t)$ je *akumulovaná efektivní plastická deformace*, která může být pro jednoosou napjatost vyjádřena [5] jako

$$\bar{\epsilon}^{pl}(t) = \int_0^t |\dot{\epsilon}^{pl}| dt. \quad (5)$$

Pro $\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}$ lze provést naznačenou derivaci. Bude tedy

$$\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t |\dot{\epsilon}^{pl}| dt = |\dot{\epsilon}^{pl}(t)|. \quad (6)$$

Pro přehlednost nyní upustíme od značení indexem „ i “ a i -tou rovnicí (4) prepíšeme

$$\dot{\alpha} + \gamma |\dot{\epsilon}^{pl}| \alpha = H \dot{\epsilon}^{pl}. \quad (7)$$

2.3 Obecná formulace Cauchyovy úlohy

Diferenciální rovnice

[1, 4] *Obyčejnou lineární diferenciální rovnicí 1. řádu* rozumíme rovnici

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in J, \quad (8)$$

kde $J = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, a funkce p a q jsou spojité na intervalu J . (Je možné připustit i uzavřený či polouzavřený interval J , v těchto případech je však třeba derivace v krajních bodech, které patří do intervalu, chápat jako jednostranné.) $\square$

Počáteční podmínka

Rovnice může (a při popisu deterministického děje musí) být doplněna *počáteční podmínkou*

$$y(x_0) = y_0, \quad (9)$$

kde $x_0 \in J$ a $y_0 \in \mathbb{R}$. □

Necht' J je otevřený či polouzavřený interval, x_0 je levým, resp. pravým krajním bodem intervalu a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0+} y(x)$, resp. $\lim_{x \rightarrow x_0-} y(x)$. Pak lze počáteční podmínku definovat vztahem

$$y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0+} y(x), \quad \text{resp.} \quad y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0-} y(x). \quad (10)$$

□

Cauchyova úloha

Uvedená diferenciální rovnice spolu s počáteční podmínkou formulují tzv. *Cauchyovu úlohu*. Za daných předpokladů pro zadanou rovnici a počáteční podmínku existuje právě jedno maximální řešení¹ Cauchyovy úlohy, které je dáno vztahem

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} + \int_{x_0}^x e^{-\int_{\xi}^x p(\tau) d\tau} q(\xi) d\xi, \quad x \in J. \quad (11)$$

□

2.4 Determinace úlohy

Funkce zatěžování

Označme plastickou deformaci $\tilde{\varepsilon}^{pl}$ a uvažujme ji jako funkci času, tj.

$$\tilde{\varepsilon}^{pl} = \varepsilon^{pl}(t), \quad (12)$$

kde $t \in J$, $J = \langle t_0; t_1 \rangle$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 \geq 0$, která je

i) ryze monotónní na J ,

ii) diferencovatelná na J .

Počáteční podmínka

Definujme počáteční podmínku v bodě t_0 . Necht'

$$\alpha(t_0) = \alpha_0. \quad (13)$$

2.5 Analýza Chabocheova modelu

Analyzujme rovnici (7), tj. Chabocheův model pro případ jednoosé napjatosti.

Koeficient $\gamma|\dot{\varepsilon}^{pl}|$ a pravá strana $H\dot{\varepsilon}^{pl}$ jsou funkce spojitě na J a rovnice (7) náleží do třídy rovnic typu (8). Na intervalu J se tedy jedná o lineární diferenciální rovnici 1. řádu. K rovnici je vztahem (13) přiřazena počáteční podmínka. Tímto je dobře definována Cauchyova úloha, která navíc má na J právě jedno maximální řešení, které je na tomto intervalu spojitě.

¹K řešení příslušné rovnice lze využít např. *Bernoulliovu metodu záměny hledané funkce*, *Lagrangeovu metodu variace konstanty* nebo *Eulerovu metodu integrujícího faktoru*.

2.6 Řešení Cauchyovy úlohy

Najdeme řešení dané Cauchyovy úlohy, které je obecně dáno vztahem (11). Bude tedy

$$\begin{aligned}
 \alpha(t) &= \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{\xi}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} H \dot{\varepsilon}^{pl}(\xi) d\xi \\
 &= \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{\xi}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} H \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)) |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi \\
 &\stackrel{pp' i)}{=} \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \int_{t_0}^t e^{-\int_{\xi}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} H |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi \\
 &\stackrel{pp' \gamma \neq 0}{=} \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \int_{t_0}^t e^{-\int_{\xi}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} \frac{H}{\gamma} \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{substituce:} \quad & - \int_{\xi}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau \stackrel{pp' ii)}{=} \vartheta \quad \Rightarrow \quad \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi = d\vartheta \\
 & - \int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau = \vartheta(t_0), \quad - \int_t^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau = 0 = \vartheta(t) \\
 & = \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \int_{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau}^0 e^{\vartheta} \frac{H}{\gamma} d\vartheta \\
 & = \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \frac{H}{\gamma} [e^{\vartheta}]_{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau}^0 \\
 & = \alpha_0 e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\xi)| d\xi} + \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \frac{H}{\gamma} \left[1 - e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} \right] \\
 & = \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) + \left[\alpha_0 - \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) \right] e^{-\int_{t_0}^t \gamma |\dot{\varepsilon}^{pl}(\tau)| d\tau} \\
 & = \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) + \left[\alpha_0 - \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) \right] e^{-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}^{pl}(\tau) d\tau}, \\
 \alpha(t) &= \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) + \left[\alpha_0 - \frac{H}{\gamma} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}^{pl}(t) \right] e^{-\gamma \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) (\varepsilon^{pl}(t) - \varepsilon^{pl}(t_0))}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

2.7 Eliminace času t

[6] Řešením $C. ú.$ je backstress α jako funkce času, tj. $\alpha = \alpha(t)$. Vzhledem k tomu, že funkce zatěžování $\tilde{\varepsilon}^{pl} = \varepsilon^{pl}(t)$ je rovněž funkcí času t , $t \in J$, a podle $pp' i)$ je ryze monotónní, je rovnicemi (12) a (14) parametricky definována funkce $\alpha = \alpha(\tilde{\varepsilon}^{pl})$.

Pp' i) zaručuje existenci inverzní funkce ε^{pl-1} k funkci ε^{pl} . Pak platí

$$t = \varepsilon^{pl-1}(\tilde{\varepsilon}^{pl}), \quad \tilde{\varepsilon}^{pl} \in \mathcal{H}(\varepsilon^{pl}). \quad (15)$$

Položme nyní $\varepsilon^{pl}(t_0) = \tilde{\varepsilon}_0^{pl}$ a upravme $\text{sgn}(\dot{\varepsilon}^{pl}(t)) = \text{sgn}(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \tilde{\varepsilon}_0^{pl})$. Pak lze dosazením vztahu (15) do vztahu (14) a složením inverzních funkcí získat relaci

$$\alpha(\tilde{\varepsilon}^{pl}) = \frac{H}{\gamma}s + \left[\alpha_0 - \frac{H}{\gamma}s \right] e^{-\gamma s(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \tilde{\varepsilon}_0^{pl})}, \quad (16)$$

kde $s = \text{sgn}(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \tilde{\varepsilon}_0^{pl})$ a $\tilde{\varepsilon}^{pl} \in \mathcal{H}(\varepsilon^{pl})$.

2.8 Celkový backstress pro jednoosou napjatost

Pro jednoosou napjatost lze backstress α v závislosti na plastické deformaci $\tilde{\varepsilon}^{pl}$ vyjádřit jako

$$\alpha(\tilde{\varepsilon}^{pl}) = \sum_{i=1}^N \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}}s + \left[\alpha_0^{(i)} - \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}}s \right] e^{-\gamma^{(i)}s(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \tilde{\varepsilon}_0^{pl})}, \quad (17)$$

kde $s = \text{sgn}(\tilde{\varepsilon}^{pl} - \tilde{\varepsilon}_0^{pl})$ a $\tilde{\varepsilon}^{pl} \in \mathcal{H}(\varepsilon^{pl})$.

2.9 Vlastnosti Chabocheova modelu

Jak lze vidět, ačkoli je Chabocheův model definován diferenciálními vztahy s derivací podle času t , určují řešení $\alpha = \alpha(t)$ a funkce zatěžování $\tilde{\varepsilon}^{pl} = \varepsilon^{pl}(t)$ parametricky definovanou funkcí, která má explicitní vyjádření dané vztahem (17). V explicitním vyjádření nevystupuje čas, což znamená, že backstress α je ve vyjádření $\alpha = \alpha(\tilde{\varepsilon}^{pl})$ závislý pouze na hodnotě plastické deformace (v daném čase). Označme tuto vlastnost jako *časovou nezávislost* Chabocheova modelu.

Vlastnost časové nezávislosti je významná z toho důvodu, že nepřipouští, aby Chabocheův model postihl rychlost zatěžování nebo vliv doby zatěžování. Za předpokladu, že model využijeme k popisu *plastického materiálu* (*rate-independent plastic material*), kterým např. oceli za běžných teplot jsou, je tato vlastnost na místě. U materiálů vykazujících časovou závislost, což mohou být i oceli za teplot, kdy dochází ke *creepu*, je model vhodné nahradit modelem časově závislým. Připomeňme, že existuje zobecnění Chabocheova modelu pro popis jevu *viskoplasticity*.

3 Obecná rovnice cyklické deformační křivky

Tento oddíl se věnuje hledání analytického modelu *cyklické deformační křivky* (CDK). Tato je modelována jako odezva Chabocheova modelu zpevnění na zatěžovací sekvence, které jsou dány různými amplitudami plastické deformace. Model CDK je tedy sestaven pro případ tvrdého zatěžování. Existence parametrického modelu CDK je významná pro identifikaci parametrů Chabocheova modelu.

3.1 Model cyklického zatěžování

CDK se získá proložením vrcholů hysterezních smyček získaných při symetricky střídavém zatěžování. Hysterezní smyčky, jejichž vrcholy definují CDK, budeme modelovat jako odezvu materiálu na tvrdé zatěžování [8]. Budeme předpokládat, že zatížení je dáno předepsanou zatěžovací sekvencí (posloupností) $(\tilde{\varepsilon}_k^{pl})$.

Zatěžovací sekvence

Předpokládejme, že zatížení bude dáno posloupností $(\tilde{\varepsilon}_k^{pl})$ hodnot plastické deformace $\tilde{\varepsilon}^{pl}$, která je dána vztahem

$$\tilde{\varepsilon}_k^{pl} = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \tilde{\varepsilon}_a^{pl}(-1)^{k+1}, & k > 0, \end{cases} \quad (18)$$

kde $\tilde{\varepsilon}_a^{pl}$ je *amplituda plastické deformace*, $\tilde{\varepsilon}_a^{pl} > 0$, a $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Časová sekvence

Definujme časovou sekvenci (t_k) vztahem

$$t_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ t_{k-1} + \Delta t_k, & k > 0, \end{cases} \quad (19)$$

kde $\Delta t_k > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Zatěžovací funkce

Zřejmě k dané zatěžovací a časové sekvenci lze nalézt posloupnost funkcí $(\varepsilon_k^{pl}(t))$ takovou, že

$$\tilde{\varepsilon}_k^{pl} = \varepsilon_k^{pl}(t_k), \quad \tilde{\varepsilon}_{k+1}^{pl} = \varepsilon_k^{pl}(t_{k+1}), \quad (20)$$

$k \in \mathbb{N}_0$, přičemž funkce $\varepsilon_k^{pl}(t)$ na intervalech $J_k = \langle t_k; t_{k+1} \rangle$ splňují předpoklady *i)* a *ii)* z předchozího oddílu. $\square$

Rychlost zatěžování

Pro dané zatěžovací funkce definujme rychlosti plastické deformace jako funkce času. Funkce $\varepsilon_k^{pl}(t)$ definované vztahem (20) mají v krajních bodech svých definičních oborů jednostranné derivace. Definujme rychlosti plastické deformace $\dot{\varepsilon}_k^{pl}(t)$ vztahy

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_k^{pl}(t) = \dot{\varepsilon}_k^{pl}(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{k+}^{pl}(t_k), \\ \dot{\varepsilon}_k^{pl}(t), & t \in (t_k; t_{k+1}), \\ \dot{\varepsilon}_{k-}^{pl}(t_{k+1}), \end{cases} \quad (21)$$

pro $k = 0$,

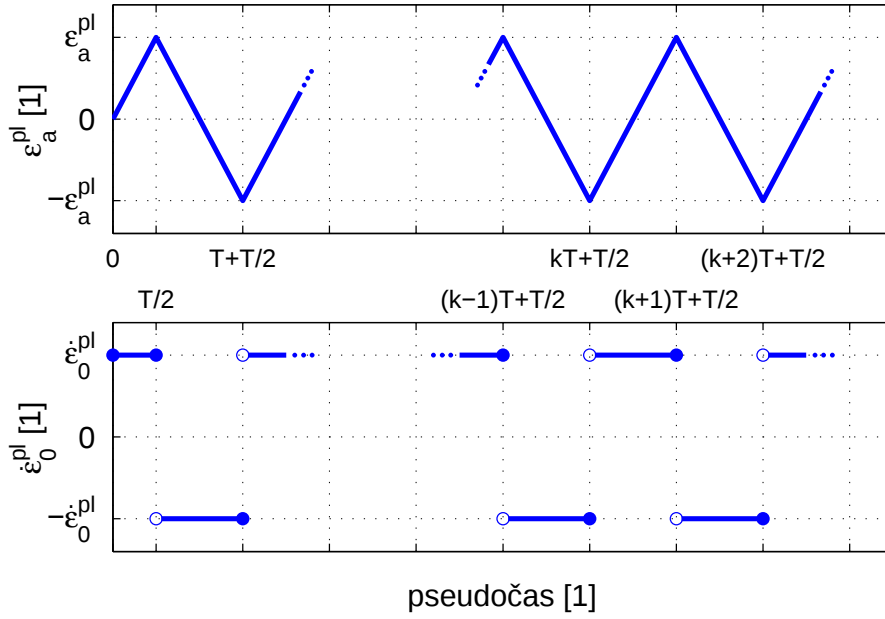
$$\frac{d}{dt}\varepsilon_k^{pl}(t) = \dot{\varepsilon}_k^{pl}(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_k^{pl}(t), & t \in (t_k; t_{k+1}), \\ \dot{\varepsilon}_{k-}^{pl}(t_{k+1}), \end{cases} \quad (22)$$

pro $k \in \mathbb{N}$. $\square$

3.2 Řešení C. ú. pro model cyklického zatěžování

Pro výše definovaný model cyklického zatěžování existuje řešení soustavy (4) pro každou funkci z posloupnosti $(\varepsilon_k^{pl}(t))$. Řešení rovnice pro k -tou zatěžovací funkci existuje na intervalu $J_0 = \langle t_0; t_1 \rangle$ pro $k = 0$ nebo na intervalech $J_k = \langle t_k; t_{k+1} \rangle$ pro $k > 0$. V levých krajních bodech každého z intervalů J_k , $k > 0$, řešení $\alpha_k(t)$, resp. $\alpha_k^{(i)}(t)$ neexistuje. Nicméně krajní body jsou hromadnými body definičních oborů daných řešení, proto využijeme toho, že lze v těchto bodech definovat jednostrannou limitu.

U funkcí $\alpha_0(t)$, resp. $\alpha_0^{(i)}(t)$, definujeme počáteční podmínku $\alpha_k(0) = \alpha_k^{(i)}(0) = 0$, což odpovídá nepevněnému materiálu na počátku experimentu. Pokud dále budeme



Obr. 1: Příklad funkcí zatěžování a rychlostí deformace

vyžadovat spojitost backstressů α , resp. $\alpha^{(i)}$ na intervale $\bigcup_{k=0}^{\infty} J_k$, což koresponduje s fyzikální povahou veličin, lze toho docílit „napojením“ funkcí $\alpha_k^{(i)}(t)$ pomocí definice počátečních podmínek vztahem

$$\alpha_k^{(i)}(t_{k+1}) = \lim_{t \rightarrow t_{(k+1)+}} \alpha_{k+1}^{(i)}(t), \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (23)$$

3.3 Rovnice CDK křivky

Dosadíme-li do vztahu (23) vztah (14) a spočteme-li příslušnou limitu, získáme vztah

$$\alpha_{0,k+1}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}}(-1)^k + \left[\alpha_{0,k}^{(i)} - \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}}(-1)^k \right] e^{-\gamma^{(i)} 2\varepsilon_a^{pl}}, \quad k > 0. \quad (24)$$

Spolu s relací $\alpha_{0,0}^{(i)} = 0$ tvoří vztah (24) *rekurentně definovanou posloupnost*. Tato posloupnost je významná z toho důvodu, že se jedná o posloupnost právě „koncových“ bodů každé z funkcí $\alpha_k^{(i)}$. Jedná se tak o posloupnost vrcholů hysterezních smyček, které definují CDK. Posloupnost obecně nebude konvergentní, ovšem lze z ní vybrat dvě posloupnosti, u kterých lze konvergenci očekávat. Konvergenci jedné z nich budeme zkoumat, a sice konvergenci posloupnosti lichých prvků posloupnosti ($\alpha_{0,k}$), která odpovídá vrcholům tahové větve hysterezních smyček. Nejprve je třeba získat rekurentní vztah pro tuto posloupnost, což je triviální. Vztah (24) nejdříve přepíšeme jako

$$\alpha_{0,k+1}^{(i)} = \mathcal{A}^{(i)}(-1)^k + \mathcal{B}^{(i)} \alpha_{0,k} - \mathcal{C}^{(i)}(-1)^k, \quad (25)$$

kde

$$\mathcal{A}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}}, \quad \mathcal{B}^{(i)} = e^{-\gamma^{(i)} 2\varepsilon_a^{pl}}, \quad \mathcal{C}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}} e^{-\gamma^{(i)} 2\varepsilon_a^{pl}}. \quad (26)$$

Pro $(k+2)$ -tý prvek posloupnosti lze psát

$$\alpha_{0,k+2}^{(i)} = \mathcal{A}^{(i)}(-1)^{k+1} + \mathcal{B}^{(i)} \alpha_{0,k+1} - \mathcal{C}^{(i)}(-1)^{k+1}. \quad (27)$$

Sloučením obou vztahů získáme rekurentní formuli

$$\alpha_{0,k+2}^{(i)} = (\mathcal{A}^{(i)} - \mathcal{C}^{(i)})(\mathcal{B}^{(i)} - 1)(-1)^k + (\mathcal{B}^{(i)})^2 \alpha_{0,k}^{(i)}. \quad (28)$$

Pokud nyní definujeme posloupnost $(k_n) = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, získáme z posloupnosti $(\alpha_{0,k}^{(i)})$ vybranou posloupnost [2] $(\alpha_{0,k_n}^{(i)})$ danou vztahem

$$\alpha_{0,(2n+1)+2}^{(i)} = (\mathcal{A}^{(i)} - \mathcal{C}^{(i)})(1 - \mathcal{B}^{(i)}) + (\mathcal{B}^{(i)})^2 \alpha_{0,2n+1}^{(i)}, \quad (29)$$

kde $\alpha_{0,1}^{(i)} = \mathcal{A}^{(i)} - \mathcal{C}^{(i)}$. Limita této posloupnosti, pokud existuje, je souřadnicí vrcholu ustálené hysterezní „podsmýčky“. Součet limit posloupností $(\alpha_{0,2n+1}^{(i)})$, $i \in \{1, \dots, N\}$, je souřadnicí vrcholu ustálené hysterezní smyčky v souřadnicích $(\tilde{\varepsilon}^{pl}, \alpha)$. Pro lepší názornost provedeme substituci

$$\mathcal{P}^{(i)} = (\mathcal{A}^{(i)} - \mathcal{C}^{(i)})(1 - \mathcal{B}^{(i)}), \quad \mathcal{Q}^{(i)} = (\mathcal{B}^{(i)})^2, \quad \mathcal{R}^{(i)} = (\mathcal{A}^{(i)} - \mathcal{C}^{(i)}) \quad (30)$$

a vztah (29) přepíšeme jako

$$\alpha_{0,(2n+1)+2}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{Q}^{(i)} \alpha_{0,2n+1}^{(i)}. \quad (31)$$

Pro výpočet limity nalezneme explicitní vyjádření posloupnosti (31). Zřejmě platí

$$\begin{aligned} n = 0 & \quad \alpha_{0,2 \cdot 0 + 1}^{(i)} = \mathcal{R}^{(i)}, \\ n = 1 & \quad \alpha_{0,2 \cdot 1 + 1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{R}^{(i)} \mathcal{Q}^{(i)}, \\ n = 2 & \quad \alpha_{0,2 \cdot 2 + 1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(i)} \mathcal{Q}^{(i)} + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^2, \\ n = 3 & \quad \alpha_{0,2 \cdot 3 + 1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(i)} \mathcal{Q}^{(i)} + \mathcal{P}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^2 + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^3, \\ & \quad \vdots \\ \text{hypotéza: } n & \quad \alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n, \quad n > 0. \end{aligned}$$

Důkaz: Důkaz provedeme matematickou indukcí.

$$n = 1 : \quad \alpha_{0,2n+1}^{(i)}|_{n=1} = \alpha_{0,2 \cdot 1 + 1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^{1-1} (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} \mathcal{Q}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{R}^{(i)} \mathcal{Q}^{(i)}.$$

n :

$$\text{Předpokládejme, že } \alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n.$$

Pak pro $(n + 1)$

$$\begin{aligned} \alpha_{0,2(n+1)+1}^{(i)} &= \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{Q}^{(i)} \alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{Q}^{(i)} \left[\mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n \right] \\ &= \mathcal{P}^{(i)} + \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=1}^n (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^{n+1} \\ &= \mathcal{P}^{(i)} \left[1 + \sum_{j=1}^n (\mathcal{Q}^{(i)})^j \right] + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^{n+1} \\ &= \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^n (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^{n+1}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Máme tedy explicitní vyjádření posloupnosti (31), které zní

$$\alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathcal{Q}^{(i)})^j + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (32)$$

Ve vztahu (32) vystupuje *geometrická řada* s kvocieniem $\mathcal{Q}^{(i)}$. Ze vztahů (26) a (30) vyplývá, že pro $\gamma^{(i)} > 0$ je kvocient $\mathcal{Q}^{(i)} \in (0; 1)$, a tedy že řada je konvergentní. S použitím vzorce pro součet geometrické řady získáváme

$$\alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i)} \frac{1 - (\mathcal{Q}^{(i)})^n}{1 - \mathcal{Q}^{(i)}} + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n. \quad (33)$$

Nyní můžeme spočítat limitu $L^{(i)}$ posloupnosti $(\alpha_{0,2n+1}^{(i)})$, která bude

$$L^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{0,2n+1}^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\mathcal{P}^{(i)} \frac{1 - (\mathcal{Q}^{(i)})^n}{1 - \mathcal{Q}^{(i)}} + \mathcal{R}^{(i)} (\mathcal{Q}^{(i)})^n \right] = \mathcal{P}^{(i)} \frac{1}{1 - \mathcal{Q}^{(i)}} \quad (34)$$

Dosazením z předešlých substitucí dostáváme

$$L^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \frac{1 - e^{-\gamma^{(i)} 2 \tilde{\varepsilon}_a^{pl}}}{1 + e^{-\gamma^{(i)} 2 \tilde{\varepsilon}_a^{pl}}}. \quad (35)$$

Výraz je dále možné upravit použitím funkce *tangens hyperbolický* na tvar

$$L^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \operatorname{tgh}(\gamma^{(i)} \tilde{\varepsilon}_a^{pl}). \quad (36)$$

Využitím věty o součtu limit dále získáváme limitu posloupnosti $(\alpha_{0,2n+1})$. Pokud položíme $\sum_{i=1}^N L^{(i)} = \alpha_L(\tilde{\varepsilon}_a^{pl})$, pak lze psát

$$\boxed{\alpha_L(\tilde{\varepsilon}_a^{pl}) = \sum_{i=1}^N \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \operatorname{tgh}(\gamma^{(i)} \tilde{\varepsilon}_a^{pl})} \quad (37)$$

Vztah (37) je rovnicí CDK vyjádřenou v souřadnicích $(\tilde{\varepsilon}^{pl}, \alpha)$. Pro praktickou aplikaci je vhodné vyjádřit CDK jako závislost napětí na deformaci. S využitím *podmínky plasticity podle von Misesa* [5] lze pro jednoosou napjatost psát

$$|\sigma - \alpha| - \sigma_Y = 0, \quad (38)$$

kde σ_Y je *mez kluzu* materiálu. Pro tahovou větev CDK pak s využitím předcházejících vztahů získáváme vzorec

$$\boxed{\sigma(\tilde{\varepsilon}_a^{pl}) = \sigma_Y + \sum_{i=1}^N \frac{H^{(i)}}{\gamma^{(i)}} \operatorname{tgh}(\gamma^{(i)} \tilde{\varepsilon}_a^{pl})} \quad (39)$$

Existence analytického vyjádření v uzavřeném tvaru usnadňuje jeho využití vzorce k identifikaci parametrů Chabocheova modelu, jak je demonstrováno dále.

Podotkneme, že vzorec byl odvozen pro případ zatěžování sekvencí o konstantní amplitudě plastické deformace. V praxi je takovýto přístup problematický, a nejspíše by vedl k aproximaci plastické deformace celkovou deformací, tj. využitím vzorce $\tilde{\varepsilon}^{pl} \approx \tilde{\varepsilon}^{tot}$, který je použitelný pro větší plastické deformace.

Existuje i jiný postup odvození. Tento předpokládá, že odezva materiálu na cyklické zatěžování konverguje k uzavřené afinní hysterezní smyčce. S využitím tohoto předpokladu pak lze snadno odvodit rovnici (39).

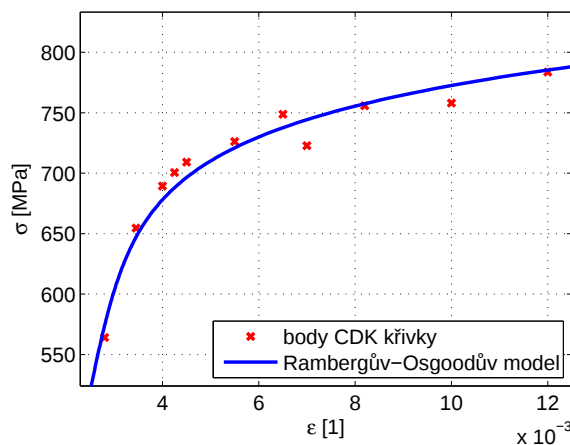
4 Identifikace Chabocheova modelu

V tomto oddíle ukážeme praktické využití vztahu (39) pro identifikaci Chabocheova modelu. Využijeme k tomu experimentálních dat cyklického zatěžování, která byla poskytnuta firmou *ŠKODA POWER a.s.*

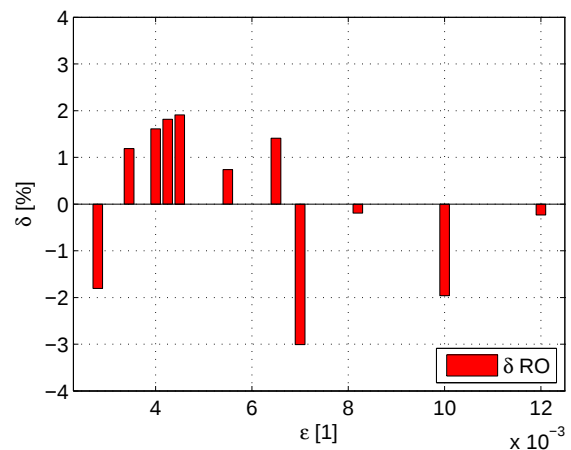
4.1 Porovnání výsledků virtuálního a reálného experimentu

Vztah (39) lze chápat jako výsledek *virtuálního experimentu* cyklického zatěžování zkušební vzorku. Lze si položit otázku, jaký bude výsledek téhož experimentu, ovšem provedeného reálně. Zřejmě, pokud má Chabocheův model s danými obecnými parametry $H^{(i)}$ a $\gamma^{(i)}$ popisovat reálné chování, pak očekáváme „stejný“ výsledek obou experimentů. Jako parametry determinující daný reálný materiál se tedy definují takové hodnoty parametrů $H^{(i)}$ a $\gamma^{(i)}$, pro něž je výsledek virtuálního a reálného experimentu „stejný“.

S ohledem na chyby měření a vliv náhodných jevů nikdy nelze dosáhnout shodných výsledků, proto je relaci „stejný“ potřeba zobecnit jako „minimální možný rozdíl“. Jednou z metod, které umožňují determinaci parametrů, pro něž předem definovaný vztah nabývá svého minima, je *metoda nejmenších čtverců (MNČ)*.



Obr. 2: Rambergův–Osgoodův model CDK



Obr. 3: Chyby aproximace

Uvažujme experimentální data podle grafu na obr. 2. Vzhledem k náročnosti cyklických zkoušek bývá obvykle k dispozici omezené množství bodů. Navíc, protože Chabocheův model je víceparametrický, může v situaci, kdy je počet experimentálních bodů srovnatelný s počtem parametrů modelu, nastat problém s aproximací. Tuto negativní vlastnost lze potlačit dvěma způsoby. Buď je potřeba získat širší soubor experimentálních dat, nebo je možné daný soubor dat aproximovat vhodným modelem, který bude respektovat statistický charakter souboru. V našem případě lze využít *Rambergova–Osgoodova* modelu

[5, 7], jehož rovnice zní

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K'} \right)^{1/n'}, \quad (40)$$

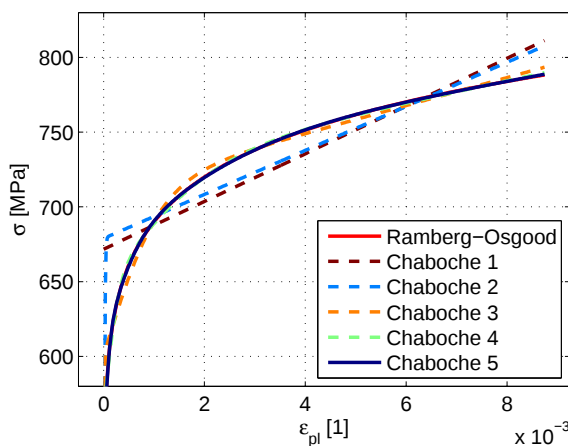
kde E je *modul pružnosti*, K' je *modul cyklického zpevnění* a n' je *exponent cyklického zpevnění*. Experimentální data se tak nejprve ve symslu MNČ aproximují Rambergovým–Osgoodovým modelem, a ten se následně aproximuje rovnicí CDK generovanou Chabocheovým modelem.

Na obrázku obr. 2 lze vidět výsledek aproximace experimentálních dat Rambergovým–Osgoodovým modelem, obr. 3 znázorňuje chyby náhrady. Pro aproximaci je nezbytné znát modul pružnosti materiálu, který se získá např. z tahového diagramu. Výsledkem aplikace MNČ jsou tak pouze parametry K' a n' . Pro daná experimentální data jsou tedy získány hodnoty² E , K' a n' .

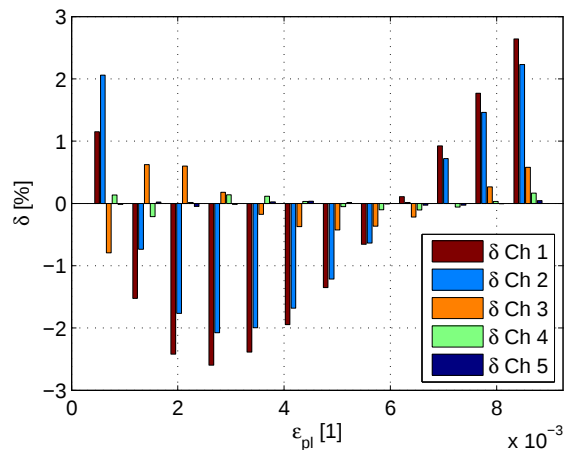
Rovnice CDK (39) je definována pro plastickou složku deformace. Z tohoto důvodu transformujeme Rambergův–Osgoodův model do plastické složky deformace. Toho lze dosáhnout aplikací vztahu

$$\varepsilon^{pl} = \varepsilon - \varepsilon^{el} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}. \quad (41)$$

Dále je nutné stanovit počet backstressů N a mez kluzu σ_Y . Je možné ukázat, že i pro malý počet backstressů, např. $N = 3$, model CDK velmi dobře aproximuje Rambergův–Osgoodův model. Viz obr. 4. V případě hodnoty σ_Y lze použít dva postupy. Buď ponechat σ_Y jako parametr modelu a určit jej rovněž pomocí MNČ, nebo jej definovat jako parametr odpovídající skutečné mezi kluzu, ať již zpevněného či nezpevněného materiálu. Rozdíl obou přístupů může být zásadní, a to z důvodu konvergence MKP výpočtu. Pokud ponecháme determinaci σ_Y na algoritmu MNČ, může tento parametr konvergovat k malým hodnotám (např. pro $N = 5$ řádově 10^{-3} [MPa]). To však znamená, že při zatížení poměrně velká část zámku může přejít do elasto-plastického stavu, a řešení se tak komplikuje. Pro MKP výpočet naší úlohy byl tento stav problematický, ježto výpočet nekonvergoval. V druhém případě je sice dosaženo větší chyby aproximace, ale i přes to model více odpovídá reálnému chování a MKP výpočet konverguje.



Obr. 4: Chabocheův model CDK



Obr. 5: Chyby aproximace

Pokud nyní zvolíme množinu referenčních bodů, pro kterou budeme určovat *střední kvadratickou odchylku*, dále počet backstressů N a mez kluzu σ_Y , lze aplikací MNČ deter-

²Z důvodu smluvních závazků autor nemůže publikovat konkrétní výsledky.

minovat parametry $H^{(i)}$ a $\gamma^{(i)}$ Chabocheova modelu vzhledem k Rambergovu–Osgoodovu modelu. Tímto je identifikace dokončena.

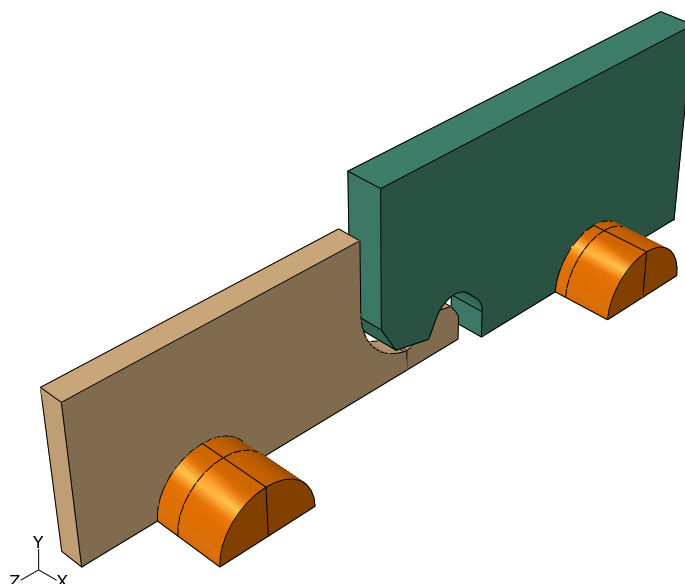
Na obr. 4 je znázorněn tvar CDK pro různý počet parametrů ($N = 1, \dots, 5$) Chabocheova modelu, na obr. 5 jsou pak znázorněny chyby příslušné aproximace.

Pro samotné řešení úlohy je zvolen nepřesnější model „Chaboche 5“, tedy model s $2N = 10$ parametry. Mez kluzu σ_Y pro aproximaci je zvolena, parametry modelu $H^{(i)}$ a $\gamma^{(i)}$ jsou určeny MNČ.

Hodnota posledního parametru $\gamma^{(5)}$ je záměrně volena jako nulová. Není výsledkem algoritmu MNČ. Pro nulový člen $\gamma^{(5)}$ model nekonverguje k žádné mezní hodnotě napětí, aproto, je-li tato předpokládaná mezní hodnota při MKP výpočtu překročena, nedojde k chybě.

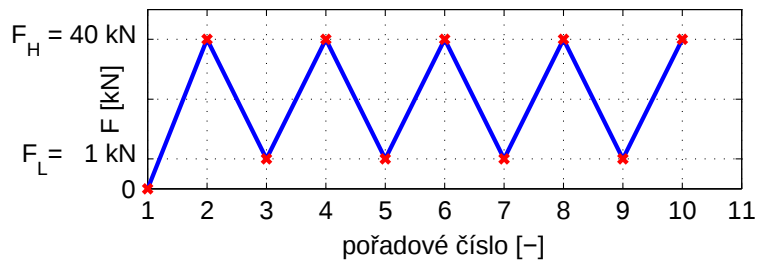
5 Řešení napjatosti v zámku lopatky

Ukážeme praktické využití Chabocheova modelu pro řešení elasto-plastické úlohy, a sice cyklického zatěžování lopatky parní turbíny. Na obr. 6 je znázorněn model zámku lopatky.

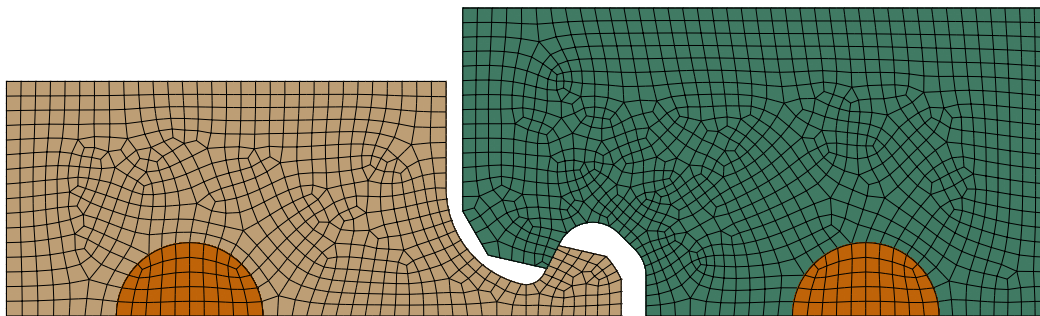


Obr. 6: Model zámku lopatky

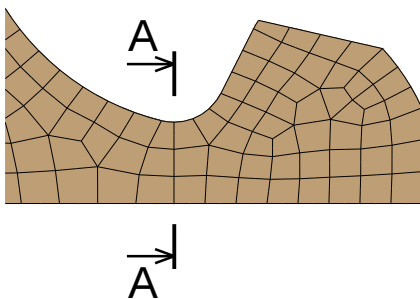
Geometrický model byl předem zadán. Zatížení je vyvozeno pomocí dvou čepů tak, aby byla co nejméně ovlivněna napjatost v analyzované části zámku. Zatěžovací sekvence je uvažována jako posloupnost měkkého zatěžování. Amplituda je volena tak, aby došlo k plastické deformaci. Vzhledem k rychlé konvergenci Chabocheova modelu má zatěžovací sekvence 4 úplné cykly, viz obr. 7. Model je vysítován prvky typu *C3D20R*, které poskytují kvadratickou interpolaci. Sít' viz na obr. 8. Výsledkem vlastního řešení je diskrétní skalární pole efektivních napětí podle von Misesa, které je definováno v uzlových bodech MKP sítě v kolmém řezu k ose symetrie zámku; řez je veden kořenem vrubu. Viz obr. 9 a 10. Hodnoty napětí ve vyšetřovaném průřezu jsou zobrazeny v grafu na obr. 11. V grafu na obr. 12 je pak porovnání napjatosti, která je řešením elasto-plastické úlohy, a napjatosti, která je řešením úlohy s použitím hookeovského modelu téhož materiálu. Srovnání je provedeno podle vzorce $\delta = (\sigma_{el} - \sigma_{ep})/\sigma_{ep} \cdot 100 [\%]$.



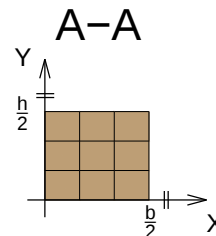
Obr. 7: Zatěžovací sekvence zámku lopatky



Obr. 8: Konečně-prvková síť

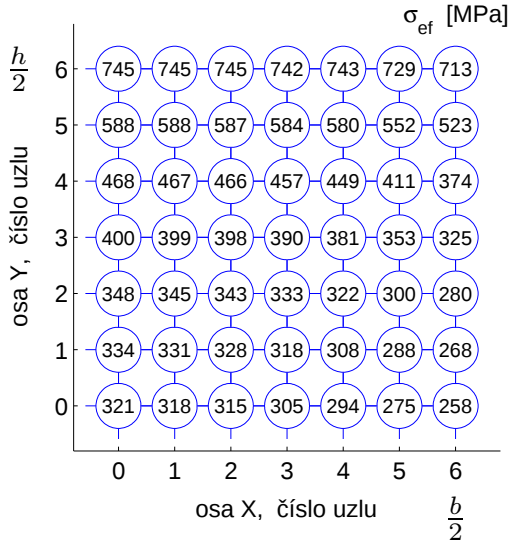


Obr. 9: Detail sítě

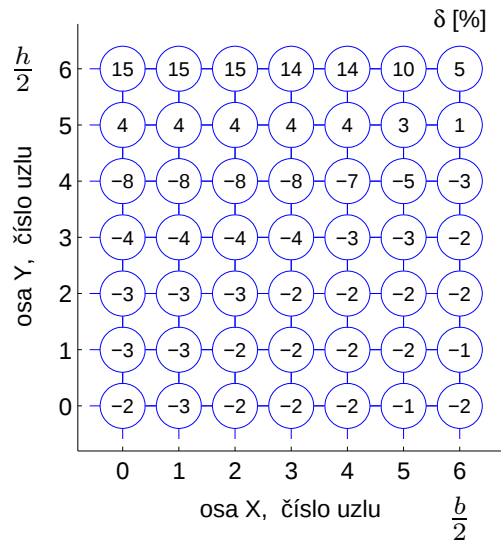


Obr. 10: Kontrolovaný průřez (1/4)

Je možné si všimnout, že maximální odchylka δ elastického a elasto-plastického řešení je asi 15 %. Takováto chyba již není zcela zanedbatelná. Dá se navíc předpokládat, že při přesnějším výpočtu, tedy např. pro jemnější síť, nebo při vyšším zatížení či jiném materiálu může být rozdíl ještě větší. Z tohoto důvodu se přístup pomocí elasto-plastického výpočtu jeví jako velmi potřebný.



Obr. 11: Distribuce napětí v průřezu



Obr. 12: Rozdíl řešení

6 Závěr

Příspěvek přibližuje *Chabocheův model kinematického zpevnění*. Je ukázáno, jakým způsobem lze odvodit rovnici *cyklické deformační křivky* pro případ jednoosé napjatosti při tvrdém zatěžování a *von Misesově podmínce plasticity*. Je získáno analytické vyjádření parametrického modelu CDK. Příslušná rovnice (39) je dále využita pro *identifikaci* Chabocheova modelu. Spočtené konstanty determinující daný materiál jsou aplikovány do MKP řešiče, v němž je Chabocheův model implementován, a je získáno *elasto-plastické* řešení dané úlohy. V samém závěru práce je ukázán rozdíl mezi výsledky konvenčního výpočtu, který nezahrnuje *jev zpevnění*, a výsledků výpočtu respektujícího plastické chování.

Je zřejmé, že zahrnutí jevu zpevnění je systematicky správný přístup, který poskytuje korektní model chování materiálu mimo oblast ryze elastické deformace. Odchyly výsledků provedené pro elastický model a elasto-plastický model materiálu jsou rovněž nezanedbatelné, dá se navíc očekávat jejich zvětšení v závislosti na větším zatížení, přesnějším výpočtu či jiné sledované veličině. Z tohoto důvodu lze řešení úlohy jako elasto-plastické doporučit. Doporučit lze i další výzkum v tomto směru, a to zejména kvůli novým technologiím (metoda směrového tuhnutí) a stupňujícím se požadavkům na predikci chování součástí.

V práci byl využit software

Abaqus/CAE, Version 6.8-2, © Dassault Systèmes, 2008 a

Matlab, Version 7.6.0.324 (R2008a), © 1984–2008, The MathWorks, Inc.

Seznam symbolů

α, α_{ij}	tenzor kinematických parametrů (back-stress)	[MPa]
$H^{(i)}$	materiálová konstanta Chabocheova modelu	[MPa]
E	Youngův modul pružnosti v tahu	[MPa]
ε_{ij}	tenzor deformace	[1]
$\epsilon^{pl}, \epsilon_{ij}^{pl}$	tenzor plastické deformace	[1]
$\tilde{\epsilon}^{el}$	elastická složka poměrné deformace	[1]
$\tilde{\epsilon}^{pl}$	plastická složka poměrné deformace	[1]

$\tilde{\varepsilon}_a^{pl}$	amplituda plastické složky poměrné deformace	[1]
$\bar{\varepsilon}^{pl}$	akumulovaná efektivní plastická deformace	[1]
ε^{pl}	funkce plastické deformace	[1]
$\gamma^{(i)}$	materiálová konstanta Chabocheova modelu	[1]
K'	modul cyklického zpevnění	[MPa]
n'	exponent cyklického zpevnění	[1]
σ	smluvní napětí	[MPa]
$\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{ij}$	tenzor napětí	[MPa]
σ_Y	mez kluzu v Chabocheově modelu	[MPa]
t	čas	[s]

Literatura

- [1] BARTSCH, HANS JOACHEN. *Matematické vzorce*. 3. vyd. Praha: Mladá fronta, 2000. ISBN 80-204-0607-7.
- [2] DONTOVÁ, EVA. *Matematika I*. 2. vyd. Praha: ČVUT, 2002. vysokoškolské skriptum. ISBN 80-01-01907-1.
- [3] DUNNE, FION – PETRINIC, NIK. *Introduction to Computational Plasticity*. 1. vyd. Oxford: University Press, 2005. ISBN 0-19-856826-6(Hbk).
- [4] HERRMANN, LEOPOLD. *Obyčejné diferenciální rovnice – řady: Komentované přednášky pro předmět Matematika III*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2009. vysokoškolské skriptum. ISBN 80-01-03041-5.
- [5] NETO, EDUARDO DE SOUZA – PERIĆ, DJORDJE – OWEN, DAVID R. J. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications*. 1. vyd. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008. ISBN 978-0-470-69452-7.
- [6] NEUSTUPA, JIŘÍ. *Matematika I*. 4. vyd. Praha: ČVUT, 2002. vysokoškolské skriptum. ISBN 80-01-02555-1.
- [7] RŮŽIČKA, MILAN – JURENKA, JOSEF – HRUBÝ, ZBYNĚK. *Dynamická pevnost a životnost*. [online] © 2009 [cit. 31.12.2009] URL: http://mechanika.fs.cvut.cz/content/files/DPZ/DPZ_2009_Hru01.pdf
- [8] RŮŽIČKA, MILAN – FIDRANSKÝ, JIŘÍ. *Pevnost a životnost letadel*. 1. vyd. Praha: ČVUT, 2000. vysokoškolské skriptum. ISBN 80-01-02254-4.