

O identitě Coriolisovy síly a síly Magnusovy

Martin Janda

Vedoucí práce: prof. Ing. Pavel Šafařík, CSc.

Abstrakt

V příspěvku je studován jev silového působení při obtékání rotujícího tělesa. Z teoretických modelů je vektor silového působení kolmý na rovinu určenou vektorem rychlosti nabíhajícího proudu tekutiny, hustotě tekutiny a cirkulaci. Z rozboru lze ukázat na analogii s Coriolisovou silou. Jsou uvedeny ukázky účinku síly při obtékání rotujícího tělesa.

Klíčová slova

Coriolisova síla, Magnusova síla

1. Historický vývoj

Vliv silového působení na rotující těleso obtékané vzduchem byl pozorován již v 17. stol., kdy se o něm v roce 1672 zmínil sir Isaac Newton. Jev byl objeven náhodou ve vojenství, když bylo pozorováno uhýbání vrženého granátu od jeho balistické dráhy i při bezvětří.

První podrobný popis tohoto jevu však pochází až z poloviny 19. stol., kdy jej podrobně popsal Gustav Heinrich Magnus v roce 1852. V roce 1902 tento jev nezávisle na Magnusovi popsal také ruský fyzik Nikolaj Jegorovič Žukovskij. Dnes tento jev pojmenováváme po jeho objeviteli jako Magnusův jev nebo také Magnusova síla. Svého času se tomuto jevu věnoval i Albert Einstein. [1]

Asi o 30 let dříve, než Gustav Heinrich Magnus, se podobnému problému věnoval také francouzský fyzik Gaspard-Gustave de Coriolis. Narodil od Magnuse se však věnoval studiu sil působících na rotující hmotný bod, nikoli jako Magnus na tekutinou obtékané rotující těleso.

1.1 Gustav Heinrich Magnus

Gustav Heinrich Magnus (narodil se 2. května 1802, zemřel 4. dubna 1870) byl německý chemik a fyzik. Narodil se v Berlíně. Jeho otec byl bohatý obchodník. Jeho první bratr Eduard (1799 – 1872) se proslavil jako malíř. Gustav po studiích v Berlíně odešel do švédského Stockholmu, kde pracoval pod vedením švédského chemika Jönse Jacoba Berzeliuse. Později odešel do Paříže, kde chvíli studoval u Francouzů Gay-Lussaca a Thénarda. V roce 1831 se vrátil do Berlína, kde na universitě vyučoval fyziku. V roce 1834 se tam stal odborným asistentem fyziky a v roce 1845 byl jmenován profesorem.

Jako učitel byl velmi úspěšný. Jeho styl výuky byl srozumitelný díky jeho precizní přípravě na výuku. Připravoval si demonstrativní nákresy a demonstrativně předváděl pokusy, čímž si zajistil přízeň nejednoho posluchače.

Jeho pole zájmů bylo opravdu široké. Mezi léty 1827 až 1833 se věnoval především výzkumu v oblasti chemie. Dnes známe v chemii pojmy jako Magnusovy zelené soli $\text{Pt}(\text{NH}_3)_4$ a PtCl_4 . Dále prováděl pokusy s absorpcí plynů v krvi (1837 – 1845). Zkoumal rozpínavost plynů se

zvyšující se teplotou (1841 – 1844). Dále se věnoval také elektrolýze a spoustě dalších oborů z oblasti fyziky a chemie.

Během svého působení na Berlínské universitě byl v letech 1847, 1858 a 1863 zvolen děkanem fakulty a v roce 1861 byl zvolen rektorem university. V roce 1865 reprezentoval Prusko na konferenci ve Frankfurtu nad Mohanem, kde se jednalo o přijetí metrického systému délek a hmotností pro Německo. V roce 1868 se stal zahraničním členem Královské Švédské akademie věd (Royal Swedish Academy of Sciences). [2]



Obr. 1 Gustav Heinrich Magnus [2]

1.2 Gaspard-Gustave de Coriolis

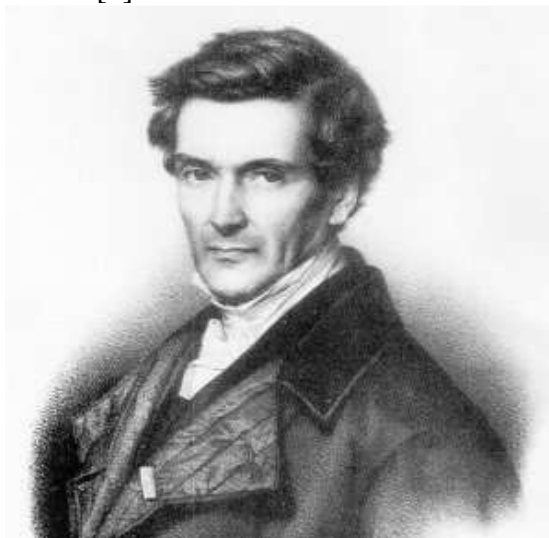
Zkráceně také Gustave Coriolis (narodil se 21.května 1792 – zemřel 19.září 1843) byl francouzský matematik, strojní inženýr a vědec. Je známý především díky svému výzkumu doplňkových sil vznikajících při rotaci kontinua.

Gustave Coriolis se narodil v Paříži. V roce 1816 se začal vyučovat na École Polytechnique. Zde se věnoval výzkumu třecích sil a mechanice tekutin. V roce 1829 publikoval text *Calcul de l'Effet Machines*, který představoval mechaniku snadno aplikovatelnou do průmyslu. V této době se také ustálil vztah pro výpočet kinetické energie ve formě, jak jej známe dnes.

V následujících letech Coriolis pracoval na rozšíření pojmu kinetická energie a dále se věnoval výzkumu rotujících systémů. Jeho první práci na toto téma byl referát *Sur le principe des forces Vives dans les mouvements relativ des machina* (O vlivu kinetické energie na pohybující se stroje). O tři roky později přišel s referátem *Sur le équations du mouvement relativ des systèmes de corps* (Rovnice relativního pohybu soustavy těles), který ho proslavil po celém světě. Zde se Coriolis zabýval přenosem energie v rotujících systémech, jako je např. vodní kolo a řešil dodatečné síly, které vznikají při rotaci kontinua. Tyto doplňkové síly rozdělil do dvou kategorií. Unášivé síly a potom síly, které byly nakonec pojmenovány podle něj, jako Coriolisovy síly.

V roce 1829 se Coriolis stal profesorem mechaniky na École Centrale des Arts et Manufactures. Po smrti Claude-Luise Naviera v roce 1836 se stal vedoucím aplikované

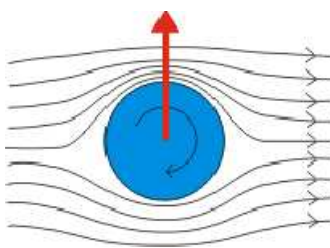
mechaniky na École des Ponts a zároveň nahradil Naviera i v Académie des Sciences. Zemřel v roce 1843 v 51 letech v Paříži. [3]



Obr. 2 Gaspard-Gustave de Coriolis [3]

2 Princip Magnusova jevu

Principem toho jevu je vznik tlakové síly, respektive vznik podtlaku na jedné straně rotujícího tělesa obtékaného tekutinou, v našem ilustrativním případě se jedná o válec. Celou situaci si můžeme představit takto. Na obvodě obtékaného válce (obr.3) se sčítají vektory potenciálního obtékání válce a obvodové rychlosti rotujícího válce. Rychlost na obvodu v horní polovině válce je větší, než na druhé straně (obr.3), protože ve vektorovém součtu jsou vektory sčítaných rychlostí v horní polovině ve stejném směru a v dolní polovině ve směru opačném. V souladu s Bernoulliiovou rovnicí zachování energie dojde tedy na horní polovině k nárůstu kinetické energie na úkor energie tlakové, a tím tedy i k poklesu tlaku. Na opačné straně dojde k přesně opačnému efektu. Tlaky na obou stranách tělesa budou tedy rozdílné a tím dojde ke vzniku tlakové síly, která působí na válec kolmo na směr nabíhající tekutiny. [4]



Obr. 3 Obtékání válce [4]

3 Odvození Magnusovy síly

Pro odvození vztahu pro výpočet Magnusovy síly působící na rotující těleso v proudu ideální tekutiny budeme vycházet ze vztahu pro výpočet síly působící na rotující těleso [6]

$$\vec{F} = \rho_{\infty} \cdot \vec{v}_{\infty} \cdot \Gamma \quad (3.1)$$

V tomto vztahu nám vystupuje hustota obtékané tekutiny ρ , dále rychlost proudící tekutiny $\vec{v}_{\infty}$ a pak cirkulace Γ . Tuto vypočítáme ze vztahu

$$\Gamma = 2\pi \cdot r \cdot \vec{u} \quad (3.2)$$

Do této rovnice dosadíme za rychlost rotace $\vec{u}$ výpočet z úhlové rychlosti

$$\vec{u} = r \cdot \vec{\omega} \quad (3.3)$$

Po dosazení rovnic do sebe a po její úpravě dostáváme vztah.

$$\vec{F} = \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} 2\pi \cdot r^2, \quad (3.4)$$

což je vztah pro výpočet Magnusovy jednotkové síly. Jednotkové proto, že jsme zanedbali třetí rozměr.

3.1 Odvození síly pro rotující válec

Pro rotující válec rovnici (3.4) upravíme snadno na výsledný vztah vynásobením délkovým rozměrem válce l .

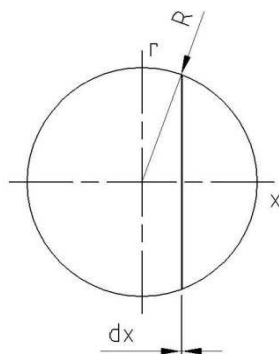
$$\vec{F} = \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} 2\pi \cdot r^2 l \quad (3.1.1)$$

Podobně odvodíme i vztah pro výpočet rotující koule.

3.2 Odvození síly pro rotující kouli

V případě koule budeme vycházet z modelu obtékaných elementárních válců. Pro zavedení třetího rozměru do rovnice (3.4) si nejprve musíme odvodit funkci pro poloměr elementárního válce r jako funkci souřadnice x z rovnice kružnice. Dostáváme funkci $r = f(x)$, kterou vyjádříme vztahem

$$r^2 = R^2 - x^2 \quad (3.2.1)$$



Obr. 4 Poloměr elementárního válce

Funkci $r = f(x)$ dosadíme do vztahu (3.4) pro výpočet jednotkové síly, doplníme diferenciály a pravou stranu rovnice vynásobíme 2, protože budeme řešit silový účinek pouze pro jednu polovinu koule $x = \langle 0, R \rangle$. Dostáváme vztah pro výpočet elementární Magnusovy síly

$$d\vec{F} = 2 \cdot \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} 2\pi (R^2 - x^2) dx \quad (3.2.2)$$

Tento vztah budeme nyní integrovat a dosadíme integrační meze

$$\vec{F} = 2 \cdot \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2 \cdot \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} 2\pi \left(R x^2 - \frac{x^3}{3} \right)_0^R \quad (3.2.3)$$

Po dosazení mezí dostáváme hledaný vztah pro výpočet Magnusovy síly působící na rotující kouli

$$\vec{F} = 2 \rho_{\infty} \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (3.2.4)$$

4 Identita se silou Coriolisovou

Budeme-li se hlouběji zabývat jednotlivými veličinami v našich odvozených rovnicích (3.1.1) a (3.2.4), můžeme ukázat na určitou spojitost mezi silou Magnusovou a silou Coriolisovou. Nejprve definujeme vztah pro výpočet síly Coriolisovy. [7]

$$\vec{F}_c = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} \cdot m \quad (4.1)$$

kde vektor $\vec{\omega}$ je úhlová rychlost rotace tekutiny, $\vec{v}$ je vektor rychlosti proudění tekutiny a m je hmotnost rotující tekutiny.

Nyní si v našich vztazích (3.1.1) a (3.2.4) všimneme součinu $\rho_{\infty} \cdot 2\pi \cdot r^2 l$, respektive $\rho_{\infty} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. Oba tyto vztahy jsou součinem hustoty ρ obtékající tekutiny a objemu dílčího tvaru. Vyjadřují tedy hmotnost tekutiny zaujatou rotujícím tělesem. Rovnice (3.1.1) a (3.2.4) tedy přepíšeme s využitím hmotností do tvaru

$$\vec{F} = 2 \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{\infty} m \quad (4.2)$$

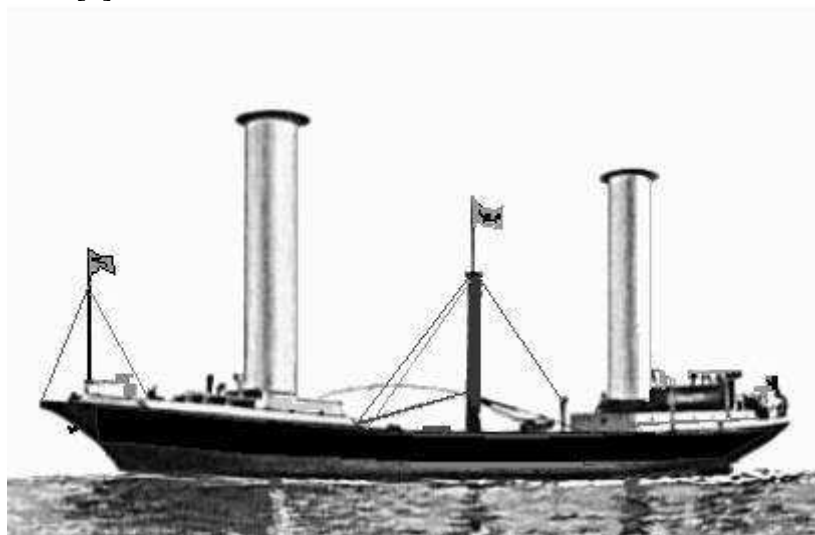
Touto postupnou úpravou jsme tedy dostali vyjádření síly Magnusovy totožně s vyjádřením síly Coriolisovy.

5 Praktické využití

Využívání tohoto jevu můžeme dnes pozorovat v mnoha odvětvích, zejména ve sportu. Například ve fotbale, kde zkušený fotbalista kope míč z rohu, který se při letu stočí do brány. Fotbalista udá míči vhodnou rotaci a ten v letu zatočí i v bezvětří za „roh“. Jev je možné pozorovat třeba i v tenise, kde udělení horní nebo dolní rotace míči úderem rakety způsobí zakřivení dráhy letu míče.

Jev je využíván i v balistice při střelbách na velké vzdálenosti, kde se s touto silou musí počítat při výpočtu balistické dráhy.

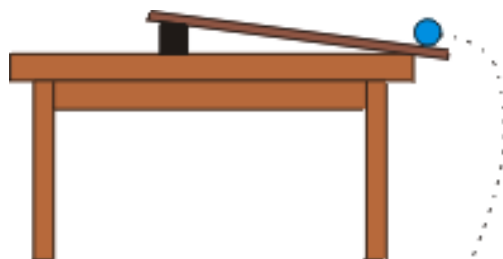
V technické praxi na tomto principu vynálezce Anton Flettner sestrojil tzv. Flettnerův motor. Jedná se o rotující válec, který využívá právě Magnusova jevu. Poprvé byl použit samotným vynálezcem na lodi místo plachet. Na této lodi byly instalovány dva válce vysoké 18m. Anton Flettner v roce 1926 na této lodi přeplul Atlantik. Správnou regulací otáček těchto válců obtékaných bočním větrem bylo možné vyvodit dopředný pohyb lodě. Výhodou bylo snadné ovládání a možnost použití menších motorů pro pohyb válců než jakých by bylo potřeba pro tradiční lodní šroub. [8]



Obr. 5 Flettnerova loď [8]

6 Praktický pokus

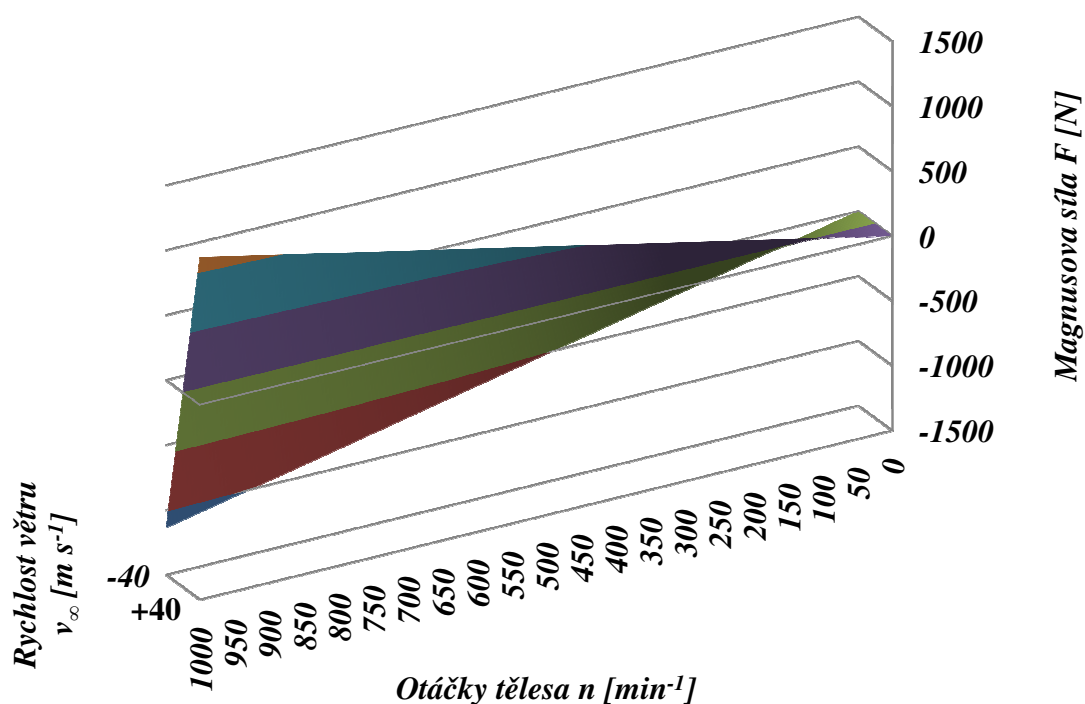
Praktickou demonstrací tohoto jevu může být pád rotujícího válečku na zem. Vlivem rotace nebude váleček padat přímo k zemi, ale jeho dráha bude zakřivená. Takováto ukázka by však byla možná, pokud by dráha válečku byla dostatečně dlouhá. Ve výpočtu totiž vystupují tři proměnné. Rychlost rotace $\vec{\omega}$, rychlost proudu obtékané tekutiny $\vec{v}_{\infty}$, která se v tomto případě bude rovnat rychlosti pádu válečku, a hmotnost tekutiny vytlačené tělesem m . Síla vychylující váleček tedy bude hodně malá, právě díky hmotnosti vytlačené tekutiny, protože tady má rozhodující vliv hustota prostředí ρ_{∞} . Proto je tento jev prakticky nepozorovatelný. V případě že bychom tento jen provedli v tekutině s vyšší hustotou, například ve vodě, mohli bychom pozorovat zakřivení dráhy válečku.



Obr. 6 Pokus s rotujícím válečkem

7 Řešení velikosti sil vznikajících při rotaci obtékaného tělesa

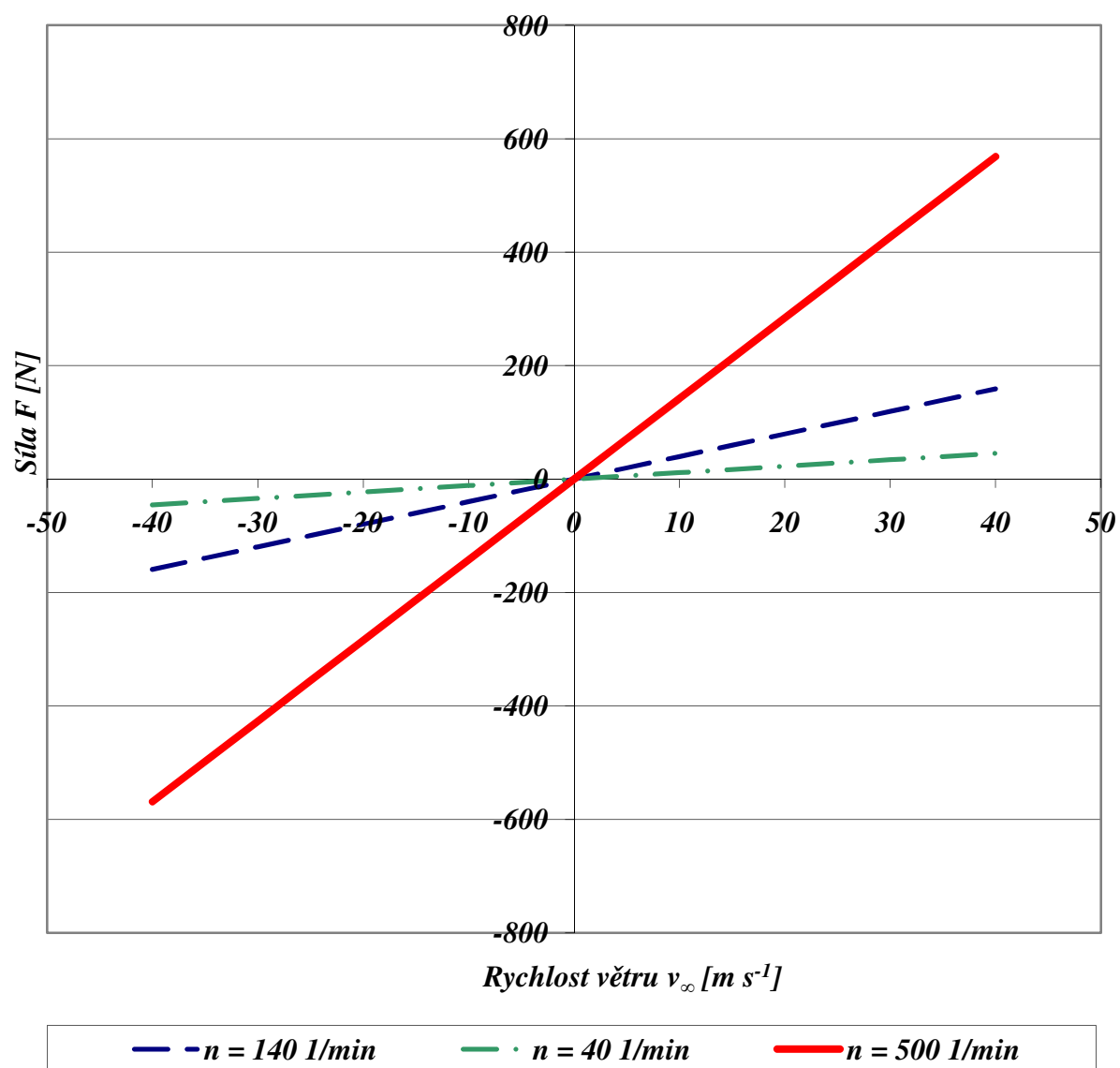
Průběh síly



Obr. 7 Závislost Magnusovy síly na otáčkách koule a na rychlosti větru

Jako příklad pro řešení silového účinku na rotující kouli jsme zvolili obtékání koule o poloměru $R = 0,3m$ ve větru (hustota vzduchu $\rho = 1,21kg.m^{-3}$) v rozsahu rychlostí $v_{\infty} = -40 \div 40 m.s^{-1}$ v závislosti na otáčkách koule $n = 0 \div 1000 min^{-1}$. Výsledkem řešení je přímková plocha na Obr. 7.

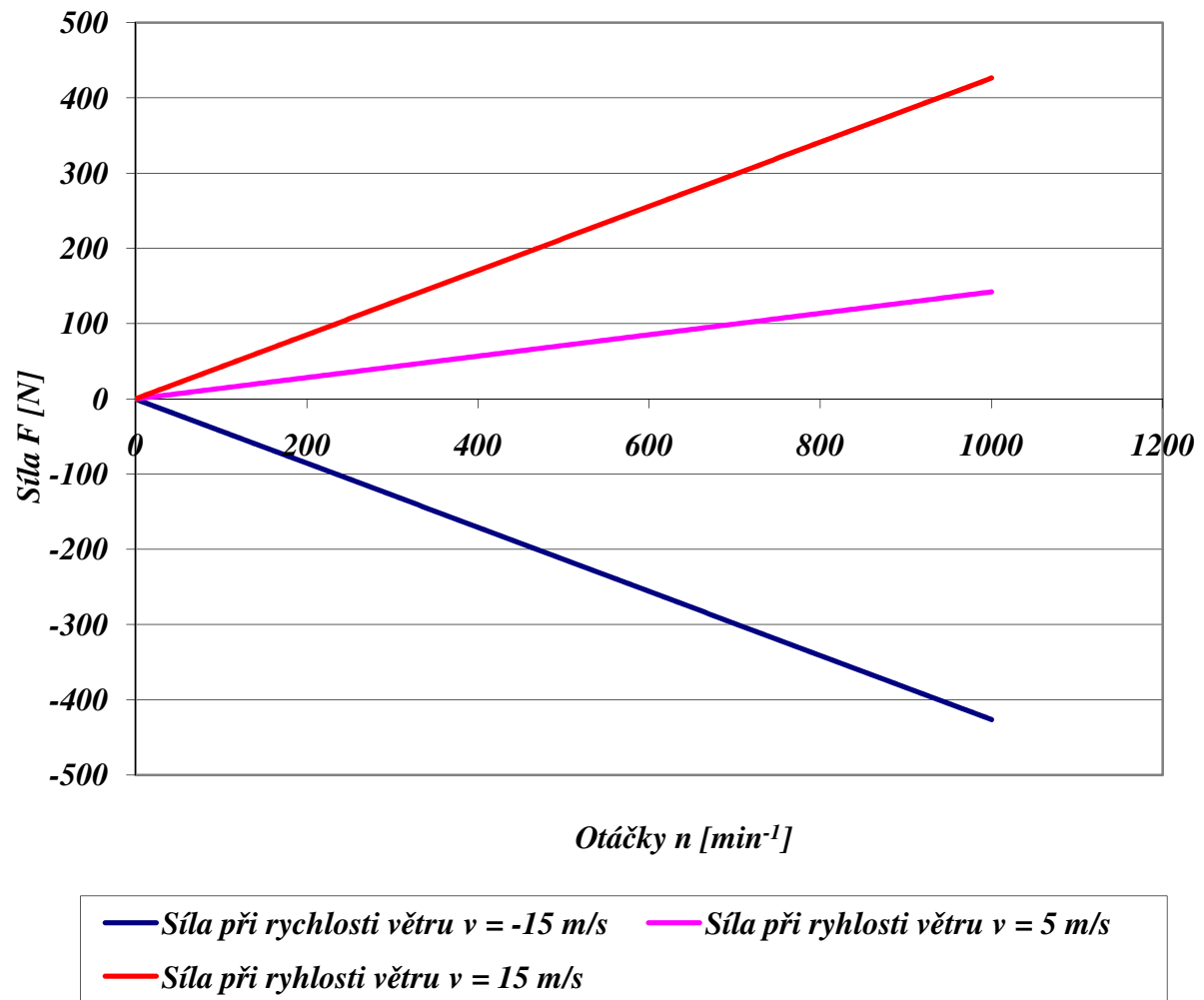
Závislost Magnusovy síly na rychlosti větru při konstantních otáčkách



Obr. 8 Závislost Magnusovy síly na rychlosti větru

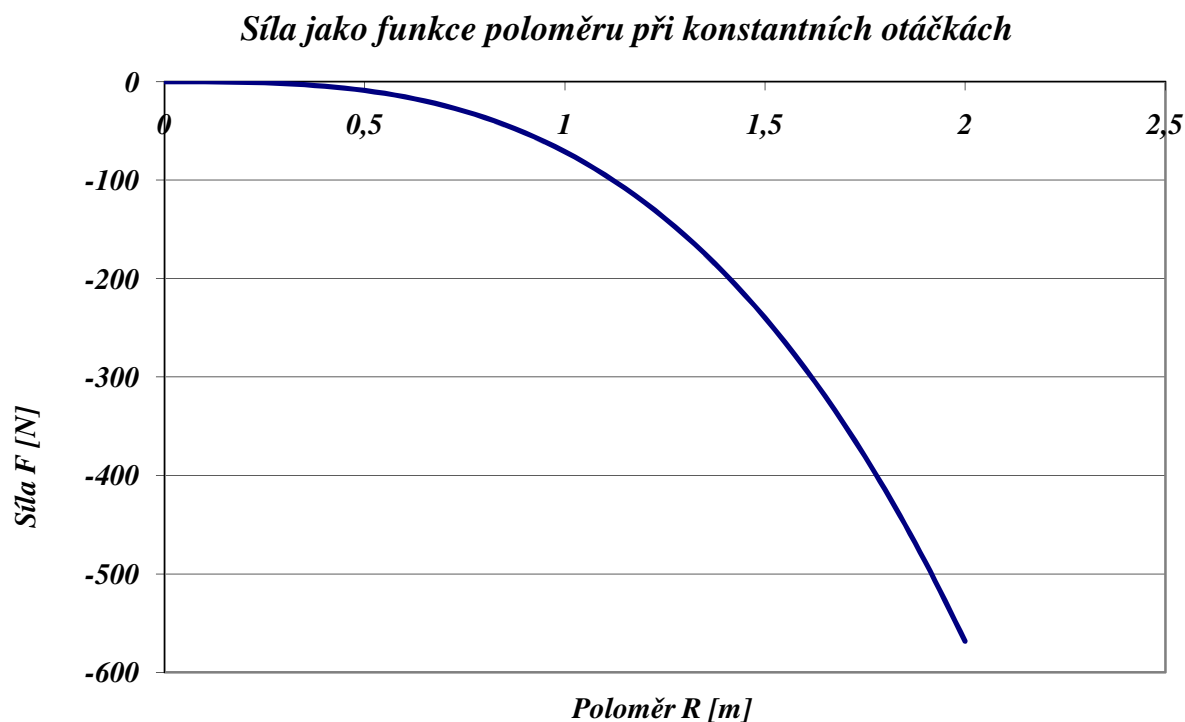
Pro konstantní hodnoty otáček je uvedena závislost Magnusovy síly na kouli na obr.8.

Závislost síly na rychlosti větru při konstantní rychlosti větru



Obr. 9 Závislost Magnusovy síly na otáčkách

Sílový účinek na kouli v závislosti na otáčkách je uveden na obr. 9 i pro změnu směru větru.



Obr. 10 Závislost Magnusovy síly na poloměru koule

Na obr. 10 je závislost Magnusovy síly na poloměru koule. Závislost je parabola třetího řádu, jak určuje vztah (3.2.4).

8 Závěr

Při studiu silového účinku na rotující válec a kouli obtékané tekutinou je ukázáno na identitu Magnusovy síly a Coriolisovy síly. Je ukázána řada příkladů aplikace tohoto silového účinku.

Seznam symbolů

$\vec{F}$	Magnusova síla	[N]
$\vec{F}_c$	Coriolisova síla	[N]
ρ_∞	hustota obtékající tekutiny	[kg·m ⁻³]
ρ	hustota rotující tekutiny	[kg·m ⁻³]
$\vec{v}_\infty$	rychlost obtékající tekutiny	[m·s ⁻¹]
R	poloměr koule	[m]
$\vec{v}$	rychlost rotující tekutiny	[m·s ⁻¹]
Γ	cirkulace	[s ⁻¹]
r	poloměr válce	[m]
$\vec{u}$	obvodová rychlost rotujícího válce nebo koule	[m·s ⁻¹]
$\vec{\omega}$	úhlová rychlost	[s ⁻¹]
l	délka válce	[m]
m	hmotnost	[kg]

Seznam použité literatury

- [1] http://cs.wikipedia.org/wiki/Magnus%C5%AFv_jev
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Gustav_Magnus
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Gaspard-Gustave_Coriolis
- [4] <http://fyzweb.cuni.cz/dilna/krouzek/k43.htm>
- [5] J. Noskievič a kol.: Mechanika tekutin, SNTL, Praha, 1987
- [6] L. M. Milne-Thomson, C., B, E.: Theoretical Hydrodynamics, London Macmilan and Co. LTD, New York St. Martin's Press 1960
- [7] J. Nožička: Mechanika tekutin, Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004
- [8] http://cs.wikipedia.org/wiki/Flettner%C5%AFv_rotor

Zajímavé odkazy

„Lítadlo“

<http://www.youtube.com/watch?v=szXSr3vD2cc>

Rotující míč

<http://www.youtube.com/watch?v=dwRYYeEk5Eg&feature=related>

Flettnerova loď

http://www.youtube.com/watch?v=__8-QSXgupA&feature=related