

# Výpočtová a experimentální analýza deformací a napětí v kompozitech

Zdeněk Padovec

## 1. Úvod

Kompozitní materiály s vláknovou výztuží a polymerní matricí se vyznačují především vysokou specifickou tuhostí a pevností v porovnání s klasickými homogenními materiály. Proto se široce používají v odvětvích, kde tuhost, pevnost a malá hmotnost jsou primárním požadavkem, například: letectví, raketová technika, automobilový průmysl a průmysl sportovních potřeb.

Na odboru pružnosti Ú12105 byla zaměřena pozornost na výrobu navíjených kompozitních struktur. Výhodou tzv. axiálního navíjení, je možnost volit nejen libovolný úhel každé vrstvy, ale lze pomocí originální technologie umístit vlákna s nulovou orientací, tj. ve směru podélné osy např. navíjené trubky. To vede k významnému zvýšení tuhosti i tahové a tlakové (vzpěrné) pevnosti prutových konstrukcí.

Práce se zaměřuje na osvojení si a analýzu postupů užívaných v praxi pro navrhování kompozitních struktur. Jsou to jak postupy analytické, numerické s využitím MKP, tak experimentální.

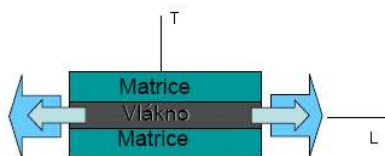
Nejprve se zabýváme teorií ortotropních laminátů a možností analytického navrhování optimální skladby vrstev navíjené kompozitové trubky. Tato teorie byla upravena a naprogramována do prostředí MATLAB. V programu ANSYS byl vytvořen MKP model s využitím vrstveného skořepinového elementu. Cílem bylo srovnání výsledků analýzy napjatosti a deformací. Výpočtové postupy byly verifikovány experimentem. Byla realizována zkouška tahem na kompozitové trubce. Všechny tři způsoby analýzy problému byly aplikovány a výsledky vzájemně porovnány a zhodnoceny.

## 2. Elastické konstanty jednosměrového kompozitu

Abychom mohli aplikovat mechaniku kompozitních materiálů, je třeba vysvětlit odlišnosti anizotropních (zde rovinně ortotropních laminátů) od materiálů izotropních, viz např. [1]

### 2.1 Modul pružnosti v podélném směru $E_L$

Uvažujeme kompozit tvořený jedním vláknem a matricí v souřadném systému  $O(L, T)$  (obr.1). Kompozit je zatížen silou  $F$  v podélném směru  $L$ . Předpokládáme, že prodloužení v podélném směru  $\Delta l$  bude v kompozitu stejné, tzn. že se prodlouží stejně vlákno i matrice.



Obr.2.1 Kompozit zatížený silou  $F$  v podélném systému

Potom platí

$$\varepsilon_L = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_{Lm}. \quad (2.1.1)$$

Dále označíme

|               |                                                          |
|---------------|----------------------------------------------------------|
| $E_f, E_m$    | modul pružnosti vlákna a matrice,                        |
| $A, A_f, A_m$ | plochy kompozitu, vlákna a matrice, kolmé ke směru $L$ . |

Napětí v tahu ve vlákne a matrici je

$$\sigma_{Lf} = E_f \varepsilon_{Lf}, \quad \sigma_{mf} = E_m \varepsilon_{Lf}. \quad (2.1.2)$$

Tahová síla je dána vztahem

$$F = A_f \sigma_{Lf} + A_m \sigma_{Lf}. \quad (2.1.3)$$

Tahové napětí v kompozitu

$$\sigma_L = \frac{F}{A} = V_f \sigma_{Lf} + V_m \sigma_{Lf} = (V_f E_f + V_m E_m) \varepsilon_L. \quad (2.1.4)$$

Z vztahu (2.1.4) plyne, že tahový modul pružnosti je

$$E_L = \frac{\sigma_L}{\varepsilon_L} = V_f E_f + V_m E_m = V_f E_f + (1 - V_f) E_m. \quad (2.1.5)$$

Jestliže je  $E_f \gg E_m$ , pak je možné vztah (2.1.5) zjednodušit. Dostaneme

$$E_L \cong V_f E_f. \quad (2.1.6)$$

## 2.2 Poissonovo číslo $\nu_{LT}$

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} = V_f \nu_f + V_m \nu_m = V_f \nu_f + (1 - V_f) \nu_m, \quad (2.2.1)$$

kde  $\nu_f$  a  $\nu_m$  jsou Poissonova čísla vlákna a matrice a  $\varepsilon_T$  a  $\varepsilon_L$  jsou poměrné deformace kompozitu v příčném a podélném směru.

## 2.3 Modul pružnosti v příčném směru $E_T$

Nyní uvažujeme, že kompozit je zatěžován silou  $F$  ve směru  $T$ . Z důvodu stejného průřezu vlákna a matrice v příčném směru musí platit

$$\sigma_T = \sigma_{Tf} = \sigma_{Tm}. \quad (2.3.1)$$

Poměrné příčné prodloužení vlákna a matrice

$$\varepsilon_{Tf} = \frac{\sigma_T}{E_f}, \quad \varepsilon_{Tm} = \frac{\sigma_T}{E_m}. \quad (2.3.2)$$

Poměrné příčné prodloužení

$$\varepsilon_T = \left( \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m} \right) \sigma_T. \quad (2.3.3)$$

Příčný modul kompozitu je definován

$$E_T = \frac{E_m}{1 - V_f \left( 1 - \frac{E_m}{E_f} \right)}. \quad (2.3.4)$$

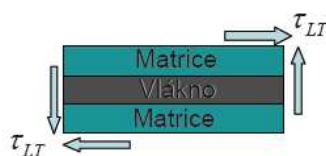
Pro případ, že  $E_f \gg E_m$ , pak

$$E_T \cong \frac{E_m}{1 - V_f}. \quad (2.3.5)$$

## 2.4 Smykový modul pružnosti $G_{LT}$

Na obr. 2 je znázorněn kompozit podrobený smykovému napětí  $\tau_{LT}$ . Vlivem zatížení dojde k deformaci. Budeme předpokládat, že smyková napětí ve vlákne a matrici jsou stejná

$$\tau_{LT} = \tau_{LTm} = \tau_{LTf}. \quad (2.4.1)$$



Obr.2.4 Kompozit podrobený smykovému napětí

Poměrný zkos kompozitu spočteme

$$\varepsilon_{LT} = \frac{u}{h} \left( \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \right) \tau_{LT}, \quad (2.4.2)$$

kde  $u$  je posunutí kompozitu v horní plošce ve směru  $L$ ,  $h$  je příčný rozměr kompozitu a  $G_f$  a  $G_m$  jsou smykové moduly pružnosti vlákna a matrice.

Smykový modul pružnosti má tvar

$$G_{LT} = \frac{G_m}{1 - V_f \left( 1 - \frac{G_m}{G_f} \right)}. \quad (2.4.3)$$

Jestliže  $G_f \gg G_m$ , pak

$$G_{LT} \cong \frac{G_m}{1 - V_f}. \quad (2.4.4)$$

Smykové moduly vlákna a matrice je možno přibližně vyšetřit na základě znalosti modulů pružnosti v tahu a Poissonova čísla jako u izotropních materiálů. Platí

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}. \quad (2.4.5)$$

## 2.5 Smykový modul pružnosti $G_{TT'}$ [2]

Z klasické laminační teorie víme, že

$$\begin{aligned} E_x &= E_L \\ E_y &= E_z = E_T \\ G_y &= G_{xz} = G_{LT} \\ \nu_{xy} &= \nu_{xz} = \nu_{LT} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Problémem je vypočítat neznámé parametry

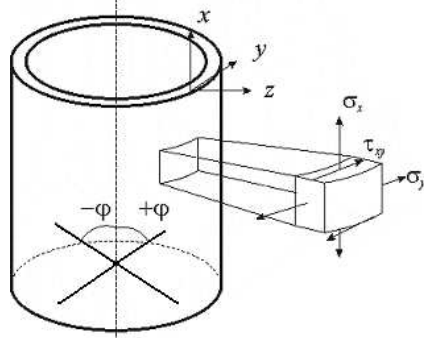
$$\begin{aligned} G_{yz} &= G_{TT'} \\ \nu_{yz} &= \nu_{TT'} \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

$G_{TT'}$  můžeme stanovit pomocí modelů, které vycházejí z cylindrického modelu vlákna a matrice. Například podle Tsaie

$$\begin{aligned} G_{TT'} &= \frac{V_f + \delta(1 - V_f)}{\frac{V_f}{G_{f23}} + \frac{\delta(1 - V_f)}{G_m}}, \\ \delta &= \frac{3 - 4\nu_m + \frac{G_m}{G_f}}{4(1 - \nu_m)}. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

### 3. Trubka [3]

Na obrázku 3.1 je vyznačen souřadný systém v kartézských souřadnicích s působením napětí ve stěně trubky. Pomocí rovnic rovnováhy, kinematických vztahů, konstitutivních rovnic a za předpokladu platnosti Hookeova zákona jsou stanovena napětí v jednotlivých vrstvách stěny a celkové poměrné deformace celé trubky.



Obr.3.1 Souřadný systém trubky

Souřadný systém volíme na středním průměru trubky, kde \$x\$, \$y\$ a \$z\$ jsou měřeny po délce, obvodu a radiálním směru. Ztížení je vnitřním přetlakem \$p\$ a kroutícím momentem \$T\$. Hlavní rovnice zahrnují rovnováhu,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + p &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

kompatibilitu,

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial \epsilon_y^0}{\partial x^2} + \frac{\partial \epsilon_x^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}^0}{\partial x \partial y}. \quad (3.2)$$

kinematické vztahy,

$$\begin{aligned} \epsilon_x^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x}, \epsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{w}{R}, \epsilon_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}, \\ K_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, K_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, K_{xy} = \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

a konstitutivní vztahy

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^0 \\ K \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

kde

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz.$$

Pro případ, kdy je trubka vetknutá na obou koncích, ale jedno uložení umožňuje rotaci a posuv, jsou okrajové podmínky v místě \$x=0\$ a \$x=l\$ následující

$$u(0, y) = v(0, y) = 0,$$

$$w(0, y) = w(l, y) = \frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial w(l, y)}{\partial x} = 0, u(l, y) = konst., v(l, y) = konst. \quad (3.5)$$

Předpokládáme konstantní hodnoty  $N_x, N_{xy}$ , nulové zakřivení, a pomocí vztahů (3.3) s částečně invertovanými rovnicemi (3.4) obdržíme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ -B^{*T} & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ K \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

kde

$$A^* = A^{-1}$$

$$B^* = -A^{-1}B$$

$$D^* = D - BA^{-1}B.$$

Je zřejmé, že vztahy (3.1) a (3.2) jsou splněny, když

$$N_y = Rp. \quad (3.7)$$

Integrací prvního z kinematických vztahů (3.3), s uvažováním rovnic (3.6) a (3.7) a aplikací okrajových podmínek v místě  $x=0$  obdržíme

$$u^0 = \varepsilon_x^0 x. \quad (3.8)$$

Stejným postupem získáme i další dva vztahy

$$v^0 = \varepsilon_{xy}^0 x$$

$$w = \varepsilon_y^0 R. \quad (3.9)$$

Výsledky získané pro  $w$  nesplňují všechny požadované okrajové podmínky. Nicméně pokud je trubka dostatečně dlouhá, nemá řešení vliv na výsledek kromě blízké vzdálenosti od vetknutého konce.

Použitím rovnice (3.6), je celkový krouticí moment  $T$ , kterým je trubka namáhána, dán vztahem:

$$T = 2\pi R(RN_{xy} + M_{xy}) = 2\pi R[RN_{xy} - B_{16}^* N_x - B_{26}^* Rp]. \quad (3.10)$$

nebo

$$N_{xy} = K_1 N_x + K_2 Rp + K_3 T. \quad (3.11)$$

kde

$$K_1 = \frac{B_{16}^*}{R}, K_2 = \frac{B_{26}^*}{R}, K_3 = \frac{1}{2\pi R^2}. \quad (3.12)$$

Dosazením rovnice (3.10) do (3.6) dostáváme

$$\varepsilon_x^0 = (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) N_x + (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) Rp + A_{16}^* K_3 T$$

$$\varepsilon_y^0 = (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) N_x + (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) Rp + A_{26}^* K_3 T.$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = (A_{16}^* + A_{66}^* K_1) N_x + (A_{26}^* + A_{66}^* K_2) Rp + A_{66}^* K_3 T \quad (3.13)$$

Aplikací Hookeova zákona na rovnice (3.11), obdržíme pro  $k$ -tou vrstvu následující vztahy pro napětí:

$$\sigma_x^{(k)} = [Q_{11}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{12}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{16}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x +$$

$$+ [Q_{11}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{12}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{16}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] Rp +$$

$$+ [Q_{11}^{(k)} A_{16}^* + Q_{12}^{(k)} A_{26}^* + Q_{16}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T$$

$$\sigma_y^{(k)} = [Q_{12}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{22}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{26}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x +$$

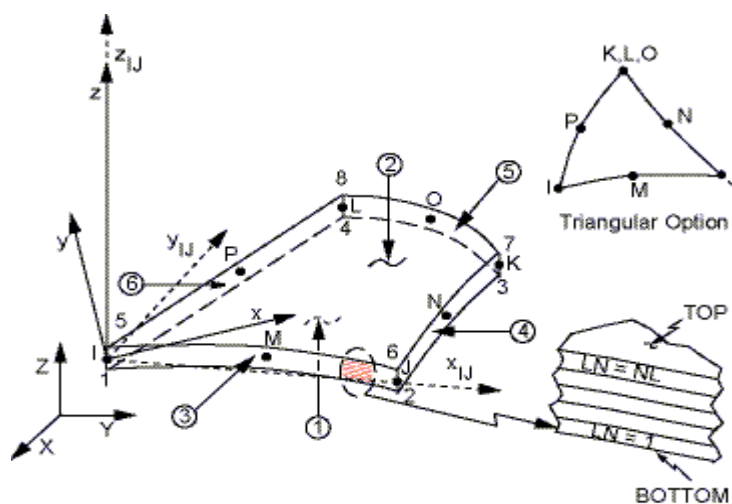
$$+ [Q_{12}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{22}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{26}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] Rp +$$

$$+ [Q_{12}^{(k)} A_{16}^* + Q_{22}^{(k)} A_{26}^* + Q_{26}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T \quad (3.14)$$

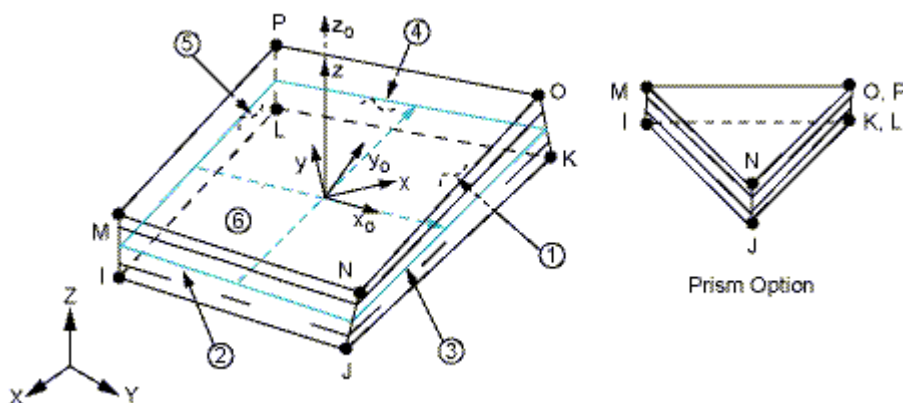
$$\begin{aligned}
& + [Q_{12}^{(k)} A_{16}^* + Q_{22}^{(k)} A_{26}^* + Q_{26}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T \\
\sigma_{xy}^{(k)} = & [Q_{16}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{26}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{66}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\
& + [Q_{16}^{(k)} (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) + Q_{26}^{(k)} (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) + Q_{66}^{(k)} (A_{26}^* + A_{66}^* K_2)] R p + \\
& + [Q_{16}^{(k)} A_{16}^* + Q_{26}^{(k)} A_{26}^* + Q_{66}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T
\end{aligned}$$

#### 4. MKP modelování kompozitních konstrukcí [2]

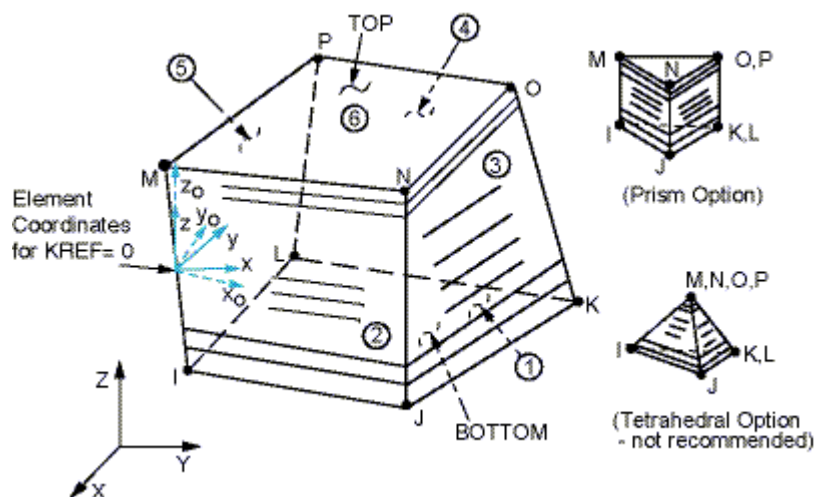
Kompozitní konstrukce jsou poddajná tělesa, která modelujeme jako kontinuum. Výhodou MKP u kompozitních součástí je to, že model nevyžaduje velkou idealizaci geometrie a okrajových podmínek, ale reprodukuje nepřesnost materiálových vstupů. Nevýhodou je také operování s velkým množstvím dat. U laminátů vlivem velkého počtu vrstev je dat mnohem více, než u klasických materiálů. Typické pro MKP výpočty je použití vrstvených prvků. Kompozit můžeme modelovat jako skořepinu (ve většině případů) a to jako konvenční skořepinu a nebo objemovou skořepinu. Na první případ používáme prvky typu SHELL 99, SHELL 91, SHELL 181 a na druhý prvky typu SOLSH 190. V ojedinělých případech modelujeme kompozit objemově a to prvky SOLID 46, SOLID 186, SOLID 191. Jak elementy vypadají bude patrné z následujících obrázků.



Obr.4.1 Prvek typu SHELL 99



Obr.4.2 Prvek typu SOLSH 190



Obr.4.3 Prvek typu SOLID 46

## 5.Porovnání analytického a MKP výpočtu s experimentálně získanými hodnotami

### 5.1 Experimentálně získané výsledky

Pomocí odporových tenzometrů byly experimentálně ověřeny axiální a tangenciální deformace  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  na trubkovém vzorku s uhlíko-epoxidového kompozitu. Zatěžování bylo voleno od 0 do 25% mezní síly odpovídající pevnosti trubky, následovalo odlehčení na nulové zatížení, další cyklus byl do 50% mezní síly, poté následovalo znovu odlehčení. Poslední cyklus zatížení proběhl až do roztržení vzorku. Údaje obou tenzometrů byly průběžně snímány a automaticky zaznamenávány. Síla při přetržení byla 20,38kN. Měření proběhlo za normální teploty 20°C.

Trubka měla vnitřní průměr  $d=26mm$ , tloušťku stěny  $h=1,4mm$  a celková délka trubky byla cca  $l=200mm$ . Konce trubky byly zesíleny návinem s výztuží ze skleněného vlákna pro redukci napětí vzniklých upnutím v čelistech trhačského stroje. Trubka byla zhotovena technologií mokrého navíjení s úhlem vinutí  $\varphi=\pm 46^\circ$ . Stěna je složena ze dvou vrstev. Složky kompozitu byly: uhlíkové vlákno T700 a epoxidová matrice EP k24. Předpokládaný objemový podíl vláken je  $V_f=55\%$ .

Zkušební zařízení byl zkušební stroj EU 100 (1000 kN) výrobce WPM Leipzig, tenzometrická aparatura SPIDER 8 HBM Germany. Použity byly tenzometry 6/120 LY11, konstanta tenzometru byla 2. Tenzometry byly instalovány v zapojení do polovičního můstku uprostřed vzorku v axiálním a tangenciálním směru..

Následující analytické a numerické ověření je pro zatěžovací sílu  $F=9,8kN$ , pro níž byly experimentálně zjištěny deformace  $\varepsilon_x=0,006101$ ,  $\varepsilon_y=-0,005159$ .



Obr.5.1.1 Zkušební stroj EU 100 WPM Leipzig



Obr.5.1.2 Detail zkušebních vzorků po poruše

## 5.2 Analytický výpočet

Analytický výpočet provedeme podle vztahu (3.15) s tím, že prvky matice  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{B}^*$  a  $\mathbf{A}^*$  získáme pomocí programu LamiEx v.3.1, ze kterého získáme i hodnoty  $E_x=10622,1\text{MPa}$ ,  $E_y=11495,3\text{MPa}$ ,  $G_{xy}=13221\text{MPa}$  a  $\nu_{xy}=0,5887$ .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 36791,2 & 32005,4 & 29461,2 \\ 32005,4 & 41050,2 & 31519 \\ 29461,2 & 31519 & 32885,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} 6,72 \cdot 10^{-5} & -3,96 \cdot 10^{-5} & 0 \\ -3,96 \cdot 10^{-5} & 6,21 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 5,4 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4,78 \cdot 10^{-5} \\ 0 & 0 & 5,16 \cdot 10^{-5} \\ 4,78 \cdot 10^{-5} & 5,16 \cdot 10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

Z rovnice (3.12) obdržíme konstanty

$$K_1 = \frac{B_{16}^*}{R} = \frac{4,78 \cdot 10^{-5}}{13,7} = 3,5 \cdot 10^{-6}$$

$$K_2 = \frac{B_{26}^*}{R} = \frac{5,16 \cdot 10^{-5}}{13,7} = 3,77 \cdot 10^{-6}$$

$$K_3 = \frac{1}{2\pi R^2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 13,7^2} = 8,48 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^{-2}.$$

Dosazením číselných hodnot do rovnice (3.10) při  $N_{xy} = p = 0$  dostaneme:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot 13,7 \cdot \left[ -4,78 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} \right] = -0,4684 \text{ N.mm}$$

Nakonec dosadíme do rovnic (3.14) při:  $A_{16}^* = A_{26}^* = p = 0$ ,  $F = 9,8 \text{ kN}$ ,  $N_x = \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} \text{ N.mm}^{-1}$

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= [Q_{11}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{12}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{16}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{11}^{(k)} A_{16}^* + Q_{12}^{(k)} A_{26}^* + Q_{16}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T = \\ &= [36791,2,6,72 \cdot 10^{-5} + 32005,4 \cdot (-3,96 \cdot 10^{-5}) + 32885,5,5,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}] \cdot \\ &\cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} + [29461,2,5,4 \cdot 10^{-6}] 8,48 \cdot 10^{-4} \cdot (-0,4684) = 137,18 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(k)} &= [Q_{12}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{22}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{16}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{12}^{(k)} A_{16}^* + Q_{22}^{(k)} A_{26}^* + Q_{26}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T = \\ &= [32005,4,6,72 \cdot 10^{-5} + 41050,2 \cdot (-3,96 \cdot 10^{-5}) + 29461,2,5,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}] \cdot \\ &\cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} + [31519,5,4 \cdot 10^{-6}] 8,48 \cdot 10^{-4} \cdot (-0,4684) = 59,8 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(k)} &= [Q_{16}^{(k)} (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) + Q_{26}^{(k)} (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) + Q_{66}^{(k)} (A_{16}^* + A_{66}^* K_1)] N_x + \\ &+ [Q_{16}^{(k)} A_{16}^* + Q_{26}^{(k)} A_{26}^* + Q_{66}^{(k)} A_{66}^*] K_3 T = \\ &= [29461,2,6,72 \cdot 10^{-5} + 31519 \cdot (-3,96 \cdot 10^{-5}) + 32885,5,5,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}] \cdot \\ &\cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} + [32885,5,5,4 \cdot 10^{-6}] 8,48 \cdot 10^{-4} \cdot (-0,4684) = 83,3 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Relativní prodloužení obdržíme z rovnice (3.13) při  $A_{16}^* = A_{26}^* = p = 0$ ,  $N_x = \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} \text{ N.mm}^{-1}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= (A_{11}^* + A_{16}^* K_1) N_x + (A_{12}^* + A_{16}^* K_2) R p + A_{16}^* K_3 T = \\ &= 6,72 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} = 0,0076 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y^0 &= (A_{12}^* + A_{26}^* K_1) N_x + (A_{22}^* + A_{26}^* K_2) R p + A_{26}^* K_3 T = \\ &= -3,96 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} = -0,0045 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy}^0 &= (A_{16}^* + A_{66}^* K_1) N_x + (A_{26}^* + A_{66}^* K_2) R p + A_{66}^* K_3 T = \\ &= 5,4 \cdot 10^{-5} \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{9800}{\pi \cdot 27,4} + 5,4 \cdot 10^{-5} \cdot 8,48 \cdot 10^{-4} \cdot (-0,4684) = 0 \end{aligned}$$

### 5.3 MKP výpočet

K MKP výpočtu byl použit program ANSYS 10.0. Trubku modelujeme jako konvenční skořepinu, které definujeme tloušťku. Na síťování byly použity elementy typu SHELL 99. Osovou sílu můžeme zadat přes algoritmus master/slave nebo jako záporný liniový tlak. Tuto variantu byla použita. V programu ANSYS přiřazujeme elementu reálnou konstantu. Pro prvek SHELL 99 to znamená, že zadáme počet vrstev (v našem případě 2) a pak pro každou jednotlivou vrstvu materiálový model, úhel natočení a její tloušťku. Materiálový model volíme ortotropní, což znamená, že musíme zadat 9 nezávislých konstant. Ty opět získáme z programu LamiEx.  $E_L=128525\text{MPa}$ ,  $E_T=E_{T'}=7317\text{MPa}$ ,  $G_{LT}=G_{LT'}=3422\text{MPa}$ ,  $G_{TT'}=G_m=1600\text{MPa}$ ,  $\nu_{LT}=\nu_{LT'}=0,345$  a  $\nu_{TT'}=\nu_m=0,4$ .

### 6. Závěr

Pomocí klasické laminační teorie ve spojení s teorií tenkostěnných skořepin (Kirchhoff-Loveovy hypotézy), numerickým řešením pomocí MKP (program ANSYS 10.0) a experimentálním zjištěním napětí a přetvoření pomocí odporových tenzometrů jsou v tabulce 6.1 uvedeny všechny zjištěné výsledky.

|                           | Naměřené  | Analytický | MKP       |
|---------------------------|-----------|------------|-----------|
| $\sigma_x[\text{MPa}]$    | -         | 137,18     | 134,26    |
| $\sigma_y[\text{MPa}]$    | -         | 59,8       | 54,13     |
| $\sigma_{xy}[\text{MPa}]$ | -         | 83,3       | -         |
| $\varepsilon_x[-]$        | 0,006101  | 0,0076     | 0,005239  |
| $\varepsilon_y[-]$        | -0,005159 | -0,0045    | -0,004872 |
| $\varepsilon_{xy}[-]$     | -         | 0          | -         |

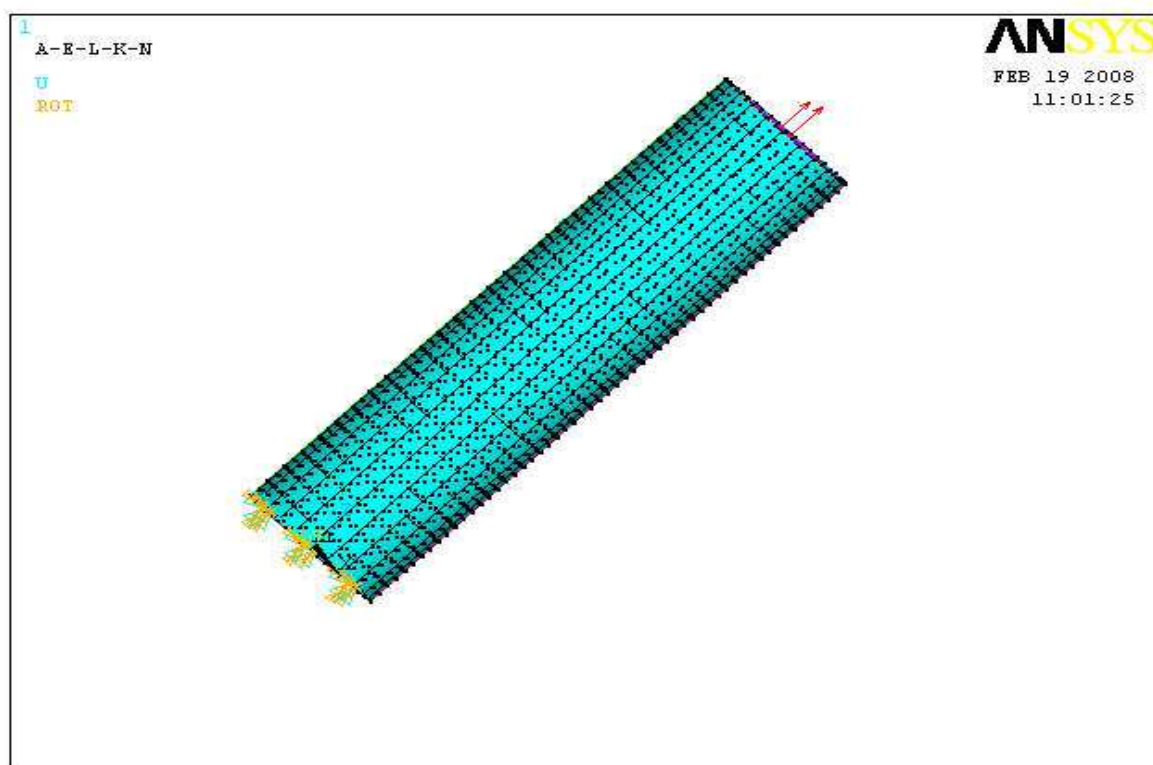
Tab. 6.1 Srovnání analytických, MKP a naměřených hodnot

Srovnání analytického a MKP řešení dává pro aplikaci v praxi vyhovující shodu. Konstrukce jsou uvažovány s předepsanými součiniteli bezpečnosti. Obě výpočtové metody dávají výsledky sobě blízké a poněkud více se rozcházejí s experimentálními výsledky. Například v axiální deformaci je rozdíl 24,5% mezi analytickým výpočtem a experimentem. Mezi MKP výpočtem a experimentem je rozdíl 15%. Uvedené rozdíly mohou být zapříčiněny nepřesnými odhady vstupních parametrů výpočtů (moduly pružnosti složek, rozdílný objemový podíl složek v kompozitu, atp.), je třeba uvážit i statistický faktor, jež ovlivňuje experiment (malý počet zkušebních vzorků, rozptyl technologie výroby, např. přesného úhlu vinutých vrstev atp.).

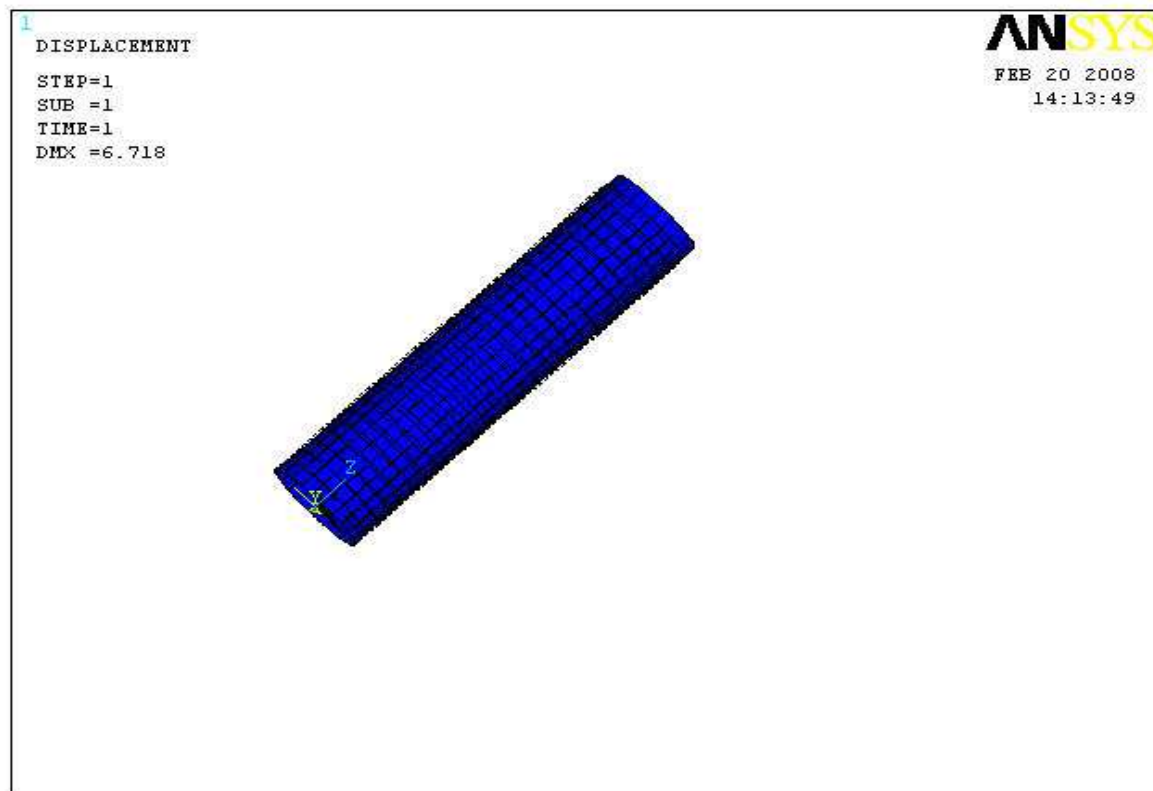
### Literatura:

- [1] LAŠ V.: Mechanika kompozitních materiálů, ZČU Plzeň, Plzeň 2004.
- [2] <http://kompozity.info>
- [3] WHITNEY J.M., HALPIN J.C.: Analysis of Laminated Anisotropic Tubes Under Combined Loading, J. Composite Materials, Vol. 2, 1968.

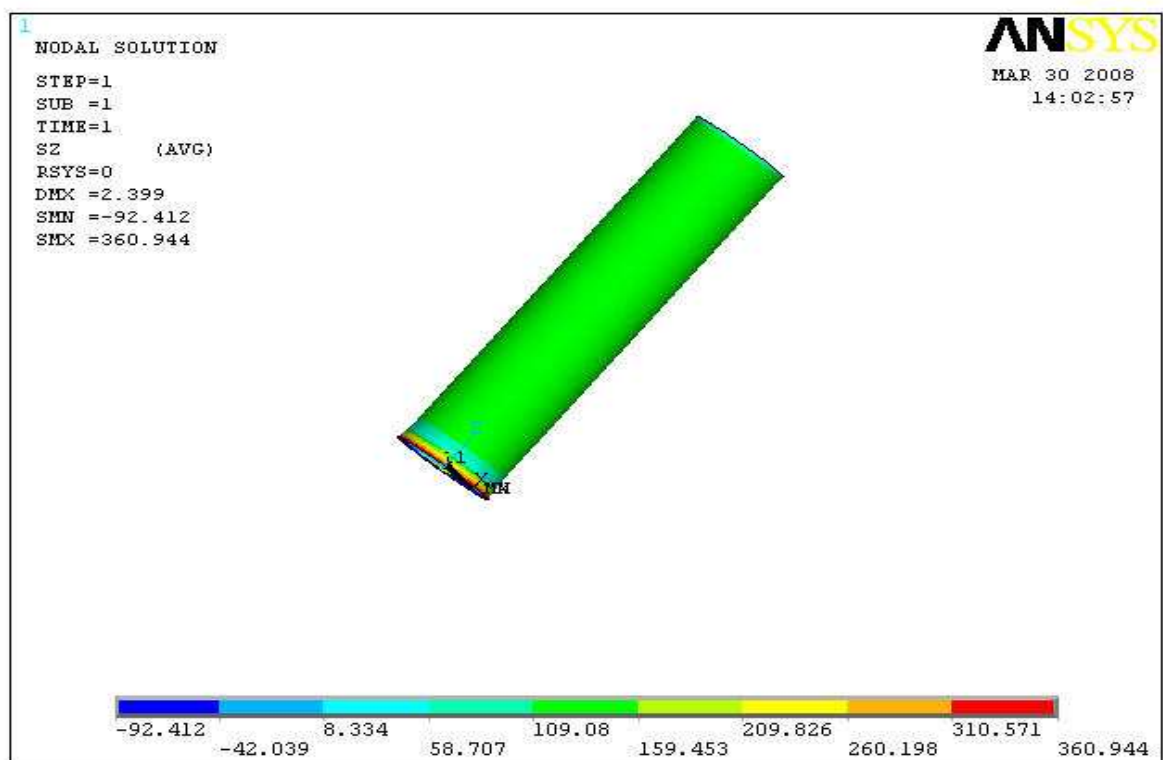
## 7. Příloha



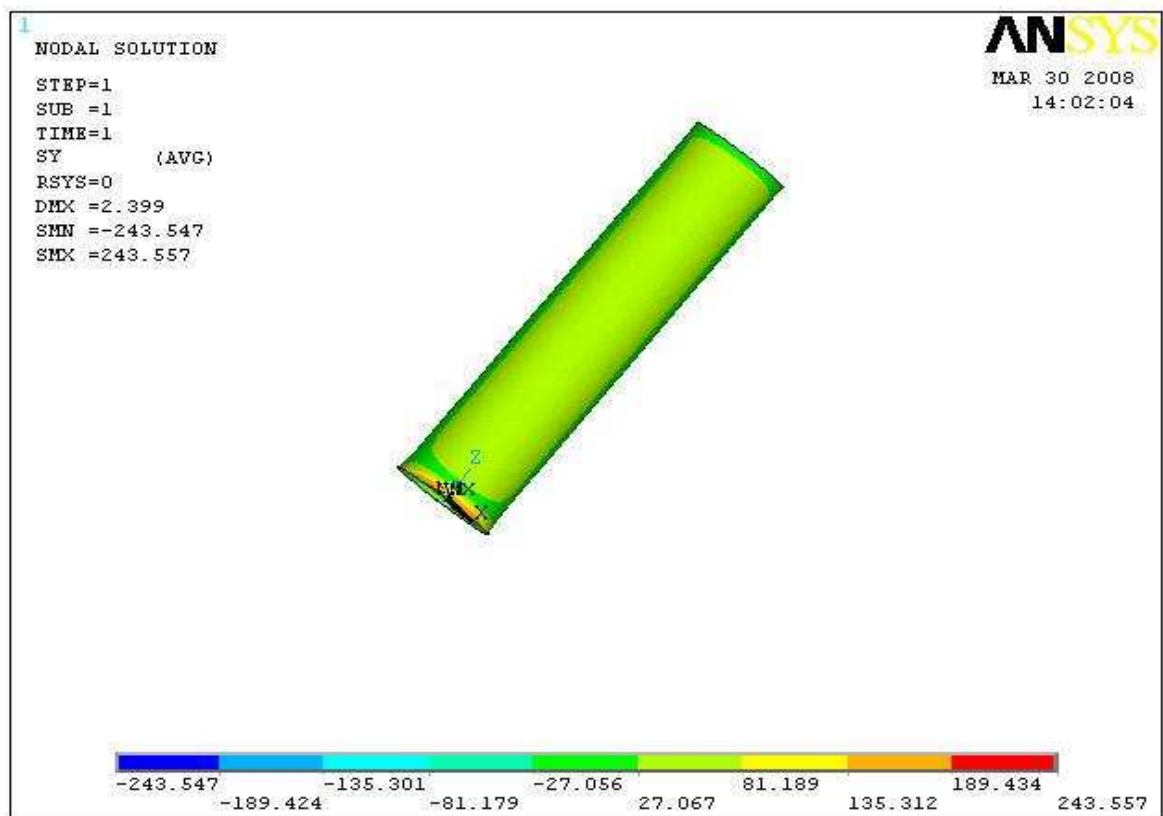
Obr.7.1 Model trubky



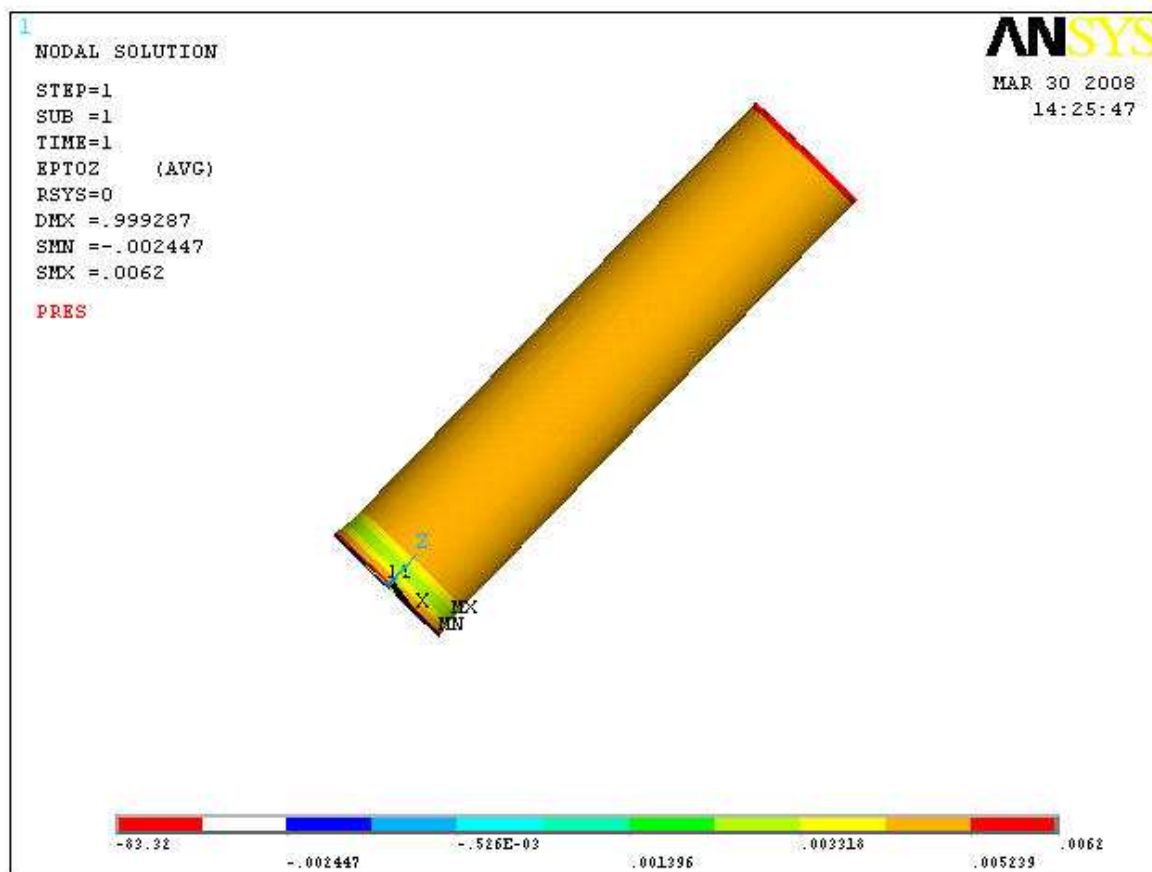
Obr.7.2 Deformovaná a nedeformovaná trubka



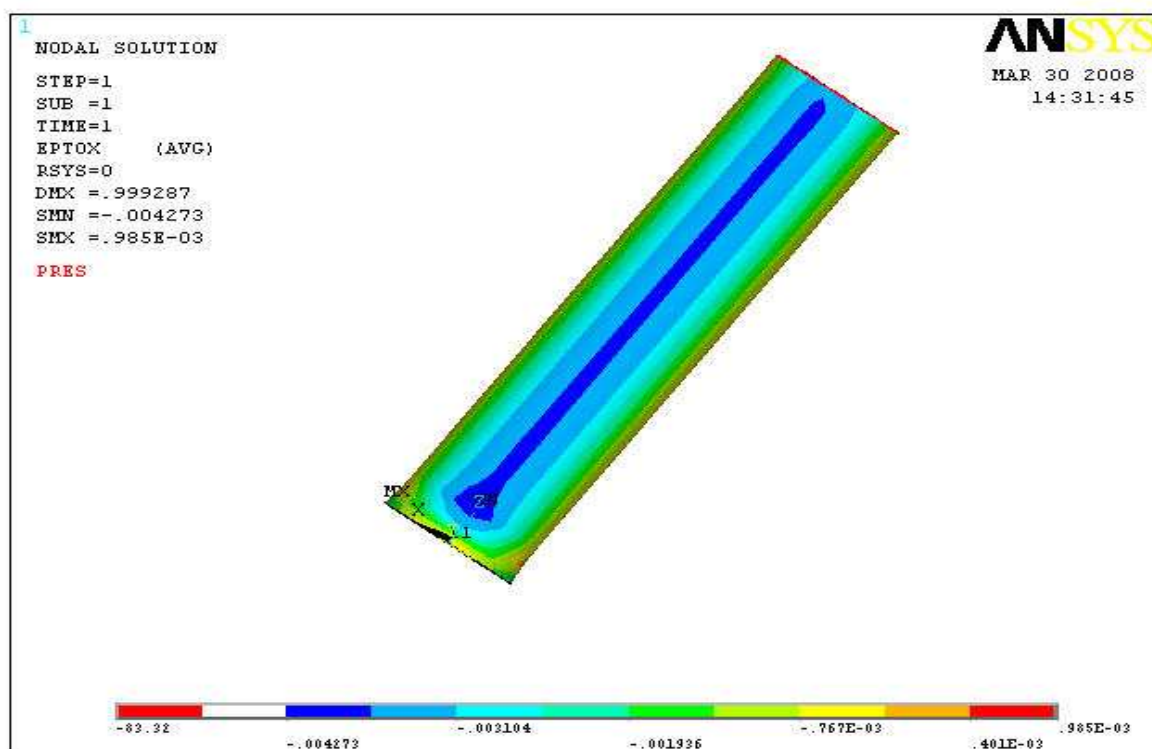
Obr.7.3 Napětí ve směru x



Obr.7.4 Napětí ve směru y



Obr.7.5 Relativní prodloužení ve směru x



Obr.7.6 Relativní prodloužení ve směru y