

Numerické řešení nestacionární rovnice s konvekcí a difuzí za použití ADI metody a kompaktního schématu

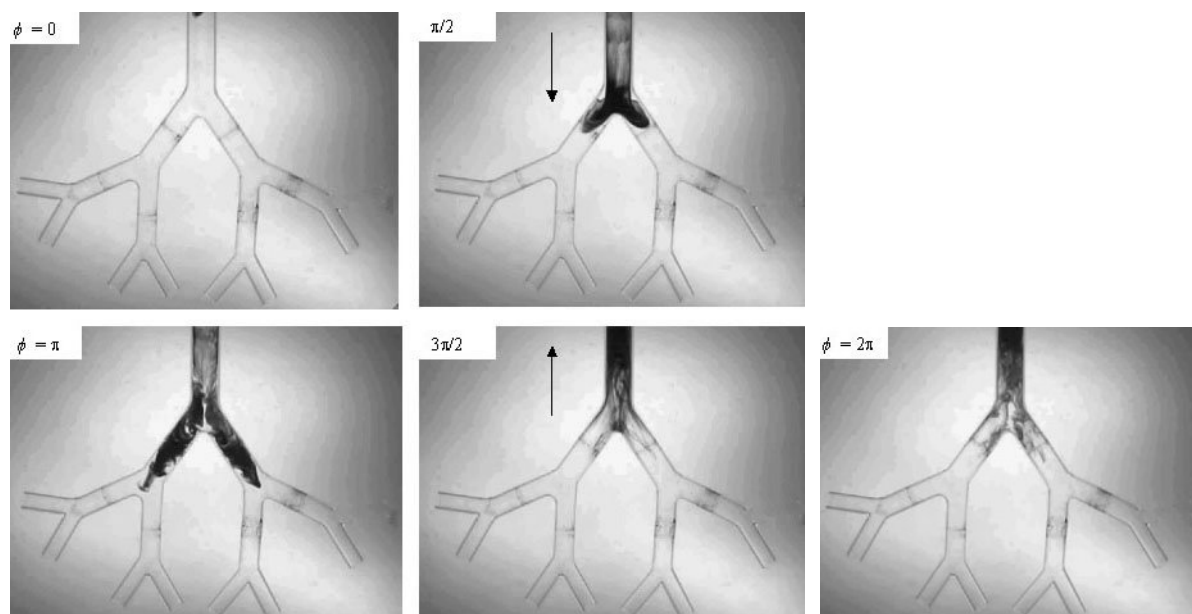
Milan Smělý

1 Úvod

Tato studie navazuje na dřívější výzkum vlivu sekundárního proudění na šíření pasivního skaláru v modelu dýchacích cest [1] a klade si za cíl numericky ověřit experimentálně zjištěný vliv separace a vířivosti, které mají rozhodující podíl na axiální přenos koncentrace plynů při oscilačním proudění v centrálních dýchacích cestách (obr.1.1).

Dřívější výzkumy ukázaly, že k přenosu hmoty při oscilačním proudění dochází i v přímém kanálu, kde je sekundární proudění způsobeno žebry, zatímco v hladké trubici, kde k separaci nedochází, je podélný přenos hmoty minimální. Proto si lze recirkulační proudění v separační zóně představit ve zjednodušeném případě jako vír, který zajišťuje přenos hmoty. Řešení v prvním přiblížení je provedeno na bázi potenciálního proudění v nekonečném přímém kanále s jedním vírem v počátku souřadné soustavy.

Výzkum tohoto jevu může být užitečný pro aplikace v lékařství, pro další objasnění přenosu hmoty při umělém vysokofrekvenčním dýchání HFV (High Frequency Ventilation), které pracuje s nízkými tlaky a malými objemy, často menšími než anatomický mrtvý prostor, tedy oblast dýchacích cest kde nedochází k výměně plynů mezi vdechnutým vzduchem a krví.



Obr. 1.1 První cyklus proudění ve větvení v modelu dýchacích cest (experiment).

2.1 ADI metoda

Nestacionární rovnici s konvekcí a difuzí lze pro proměnou Φ pro dvourozměrný případ za předpokladu splnění rovnice kontinuity zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - c^y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v^x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + v^y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad (1)$$

kde $c^{x(y)}$ a $v^{x(y)}$ značí rychlosti konvekce a difuze ve směru $x(y)$.

Aplikací Crank-Nicholsonova schématu a ADI faktorizace pro časovou integraci lze výchozí rovnici převést na tvar

$$\left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(c^x \frac{\partial}{\partial x} - v^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \left[1 + \frac{\Delta t}{2} \left(c^y \frac{\partial}{\partial y} - v^y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \Phi^{n+1} \\ = \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(c^x \frac{\partial}{\partial x} - v^x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \left[1 - \frac{\Delta t}{2} \left(c^y \frac{\partial}{\partial y} - v^y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] \Phi^n + O(\Delta t^2)$$

a ten bez ztráty časové přesnosti upravit na

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2} c^x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} v^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} c^y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} v^y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi^{n+1} \\ = \left(1 - \frac{\Delta t}{2} c^x \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} v^x \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \left(1 - \frac{\Delta t}{2} c^y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\Delta t}{2} v^y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi^n + O(\Delta t^2) \quad (2)$$

kde prostorové derivace lze diskretizovat například použitím standardních kompaktních schémat čtvrtého řádu.

2.2 Aplikace kompaktních schémat

Kompaktní schémata která byla odvozena podle [4] lze zapsat v maticovém tvaru pro první a druhou derivaci ve směru x ve tvarech

$$L_x \Phi_x = A_x \Phi,$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 2 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 2 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & & & 2 & 1 \end{array} \right] \Phi_x = \frac{1}{\Delta x} \left[\begin{array}{ccccccc} -5/2 & 2 & 1/2 & & & & \\ & -3 & 0 & 3 & & & \\ & & -3 & 0 & 3 & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & -1/2 & -2 & 5/2 \end{array} \right] \Phi$$

$$L_{xx} \Phi_{xx} = B_{xx} \Phi,$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 11 & & & & & \\ & 1 & 10 & 1 & & & \\ & & 1 & 10 & 1 & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 11 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 11 \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & & & & 1 & 10 & 1 \\ & & & & & & & & & 11 & 1 \end{array} \right] \Phi_{xx} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[\begin{array}{ccccccc} 13 & -27 & 15 & -1 & & & \\ & 12 & -24 & 12 & & & \\ & & 12 & -24 & 12 & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & -1 & 15 & -27 & 13 \end{array} \right] \Phi$$

a zcela obdobně pro směr y.

Rovnici (2) pak lze převést do maticového tvaru

$$L_x^{-1} \left(L_x + \frac{\Delta t}{2} c^x A_x \right) L_{xx}^{-1} \left(L_{xx} - \frac{\Delta t}{2} v^x B_{xx} \right) L_y^{-1} \left(L_y + \frac{\Delta t}{2} c^y A_y \right) L_{yy}^{-1} \left(L_{yy} - \frac{\Delta t}{2} v^y B_{yy} \right) \Phi^{n+1} \\ = L_x^{-1} \left(L_x - \frac{\Delta t}{2} c^x A_x \right) L_{xx}^{-1} \left(L_{xx} + \frac{\Delta t}{2} v^x B_{xx} \right) L_y^{-1} \left(L_y - \frac{\Delta t}{2} c^y A_y \right) L_{yy}^{-1} \left(L_{yy} + \frac{\Delta t}{2} v^y B_{yy} \right) \Phi^n$$

Řešení této rovnice se skládá z postupného řešení tří-, pěti- a sedmidiagonálních soustav. Systém je nepodmíněně stabilní a je dosaženo čtvrtého řádu přesnosti v prostoru a druhého řádu přesnosti v čase.

2.3 Testovací příklad

Pro ověření je zvoleno šíření Gaussova pulsu v oblasti $[0,2] \times [0,2]$ vycházejícího z počátečních podmínek

$$\Phi(0, x, y) = \exp \left(-\frac{(x-0.5)^2}{v^x} - \frac{(y-0.5)^2}{v^y} \right),$$

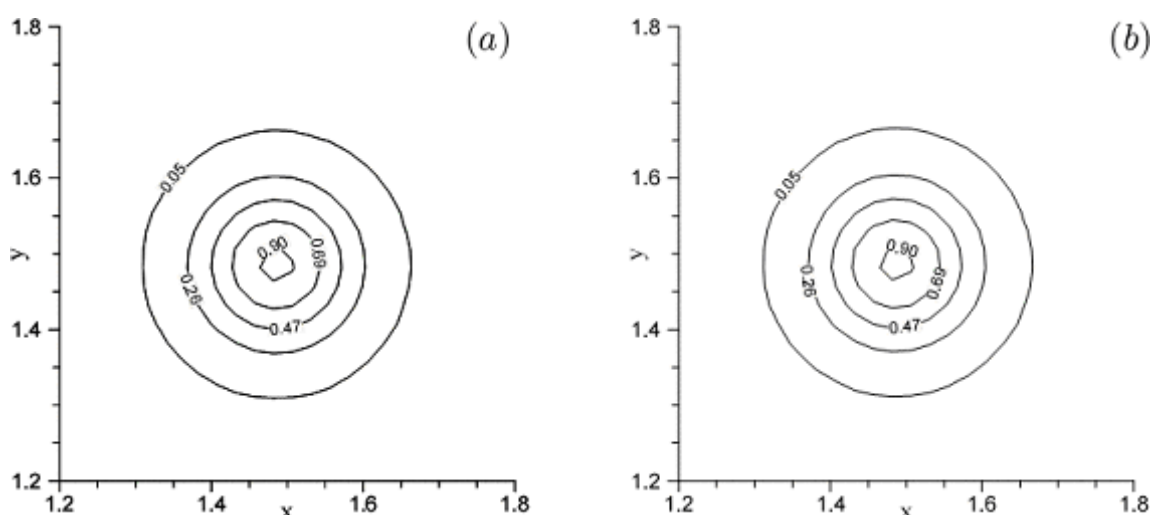
s exaktním řešením ve tvaru

$$\Phi_{\text{exakt}}(t, x, y) = \frac{1}{4t+1} \exp \left(-\frac{(x-c^x t-0.5)^2}{v^x(4t+1)} - \frac{(y-c^y t-0.5)^2}{v^y(4t+1)} \right).$$

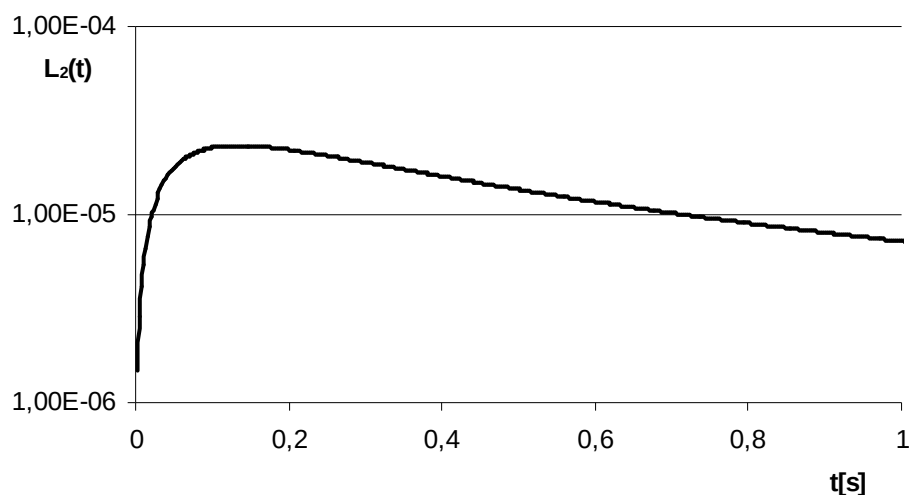
Zvolena uniformní síť $\Delta x = \Delta y = 0.025$, difuze $v^x = v^y = 0.01$. Zkoumány dva případy, $c^x = c^y = 0.8$ a $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3}$ pro $Pe = 2$ a $c^x = c^y = 80$ a $\Delta t = 2.5 \times 10^{-5}$ pro $Pe = 200$.

Norma chyby je vyjádřena ve formě

$$L_2 = \sqrt{1/(M \cdot N) \sum_{i=1, j=1}^{M, N} (\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j,\text{exakt}})^2}.$$



Obr. 2.1 Srovnání exaktního řešení (a) s ADI (b) v oblasti $1.2 < x, y < 1.8$ v čase 0.0125 při $Pe = 200$.



Obr. 2.2 Vývoj chyby L_2 v čase při $Pe = 2$.

Z obr. 2.2 je patrný pokles chyby v průběhu výpočtu což je velmi výhodné pro řešení nestacionárních problémů a to i při vyšších Pécletových číslech, kde oproti jiným metodám nedochází k rozmazání vlivem vysoké rychlosti konvekce jak je ukázáno na obr. 2.1.

3 Model kanálu

Pro první přiblížení je hledáno řešení na bázi potenciálního proudění v nekonečně dlouhém kanálu o šířce $b = 1 \text{ m}$.

Komplexní potenciál pro případ oscilačního hlavního proudu o frekvenci f ve směru x s potenciálním vírem v počátku souřadné soustavy může být vyjádřen jako

$$F(z) = a(t) \cdot (y + ix) - i \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \ln(y + i(x - nb)),$$

kde $a(t) = A \cos(2\pi f t)$.

Z čehož lze získat rovnice pro rychlost proudění

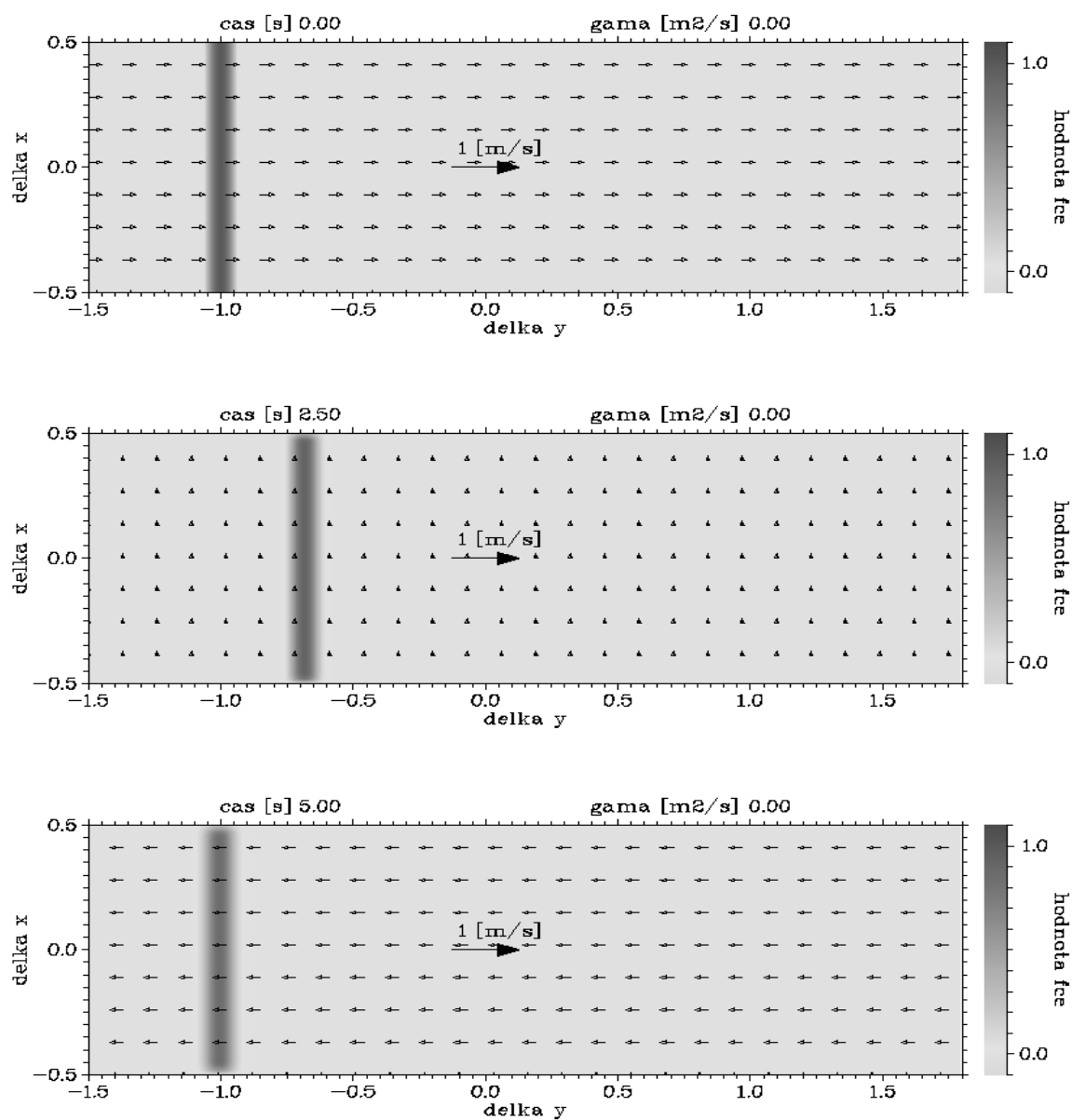
$$c_x = \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{y}{y^2 + (x - nb)^2},$$

$$c_y = a(t) - \frac{\Gamma(t)}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{x - nb}{y^2 + (x - nb)^2}.$$

4 Výsledky

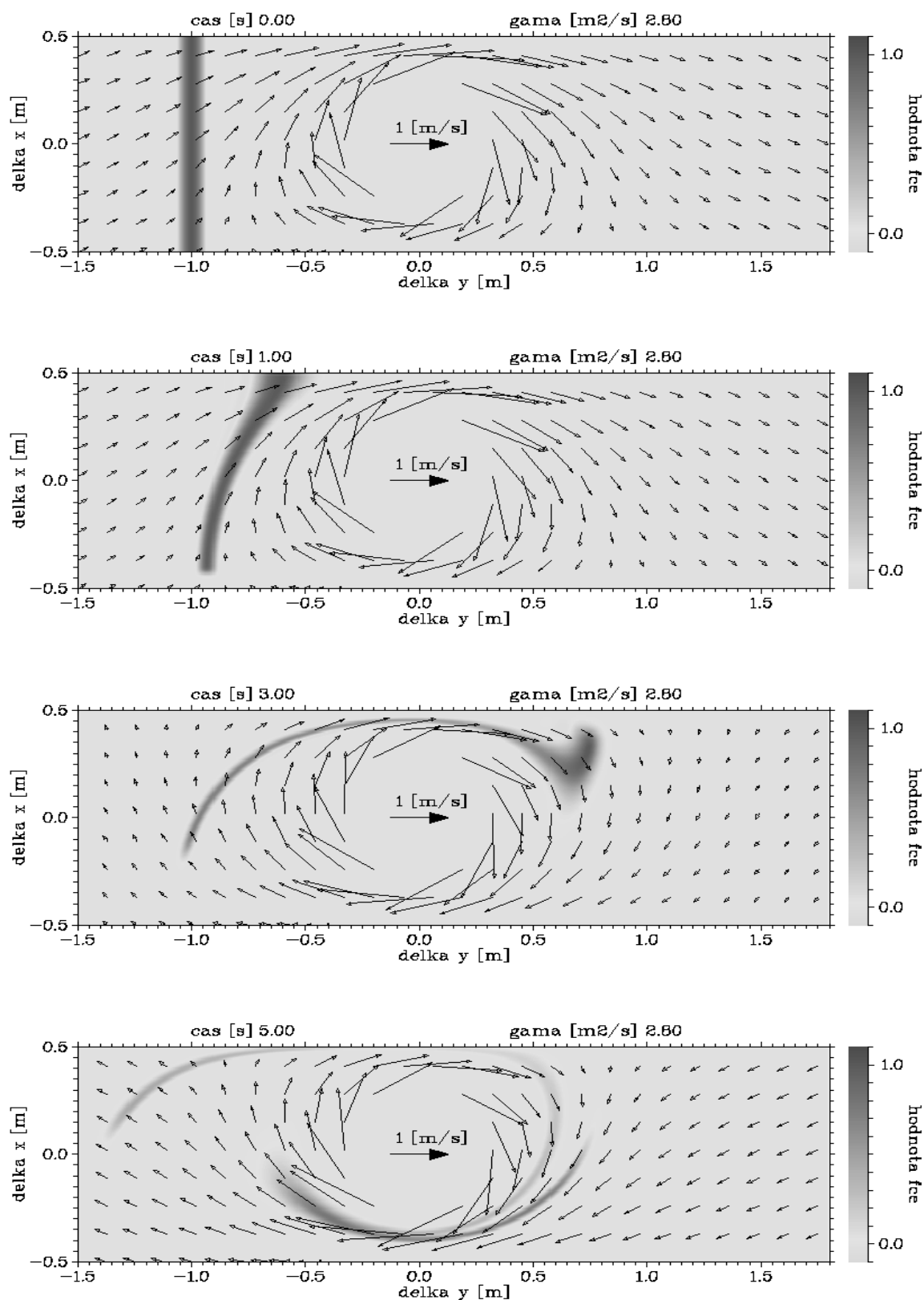
Na jednotlivých sekvencích je ukázáno řešení pro amplitudu oscilačního proudění $A = 0.2 \text{ m/s}$, frekvenci $f = 0.1 \text{ Hz}$ a nulovou, konstantní nebo proměnnou vířivost Γ po čas jedné periody $t = 0$ až 5 s a rozložení pole rychlostí, kde plný vektor s označením 1 [m/s] ukazuje měřítko rychlosti. Počáteční puls je rovnoměrně rozmístěn napříč kanálem ve vzdálenosti šířky kanálu od středu víru. Součinitel difuze je zvolen $\nu^x = \nu^y = 5 \times 10^{-5}$ což řádově odpovídá molekulární difuzi v dvouatomovém plynu.

Obr. 4.1 zachycuje posloupnost řešení pouze oscilačního proudění s nulovou vířivostí Γ . Vyplývá z něho minimální přenos hmoty podél kanálu bez sekundárního proudění. Patrné je i postupné rozptylování pulsu vlivem difuze.



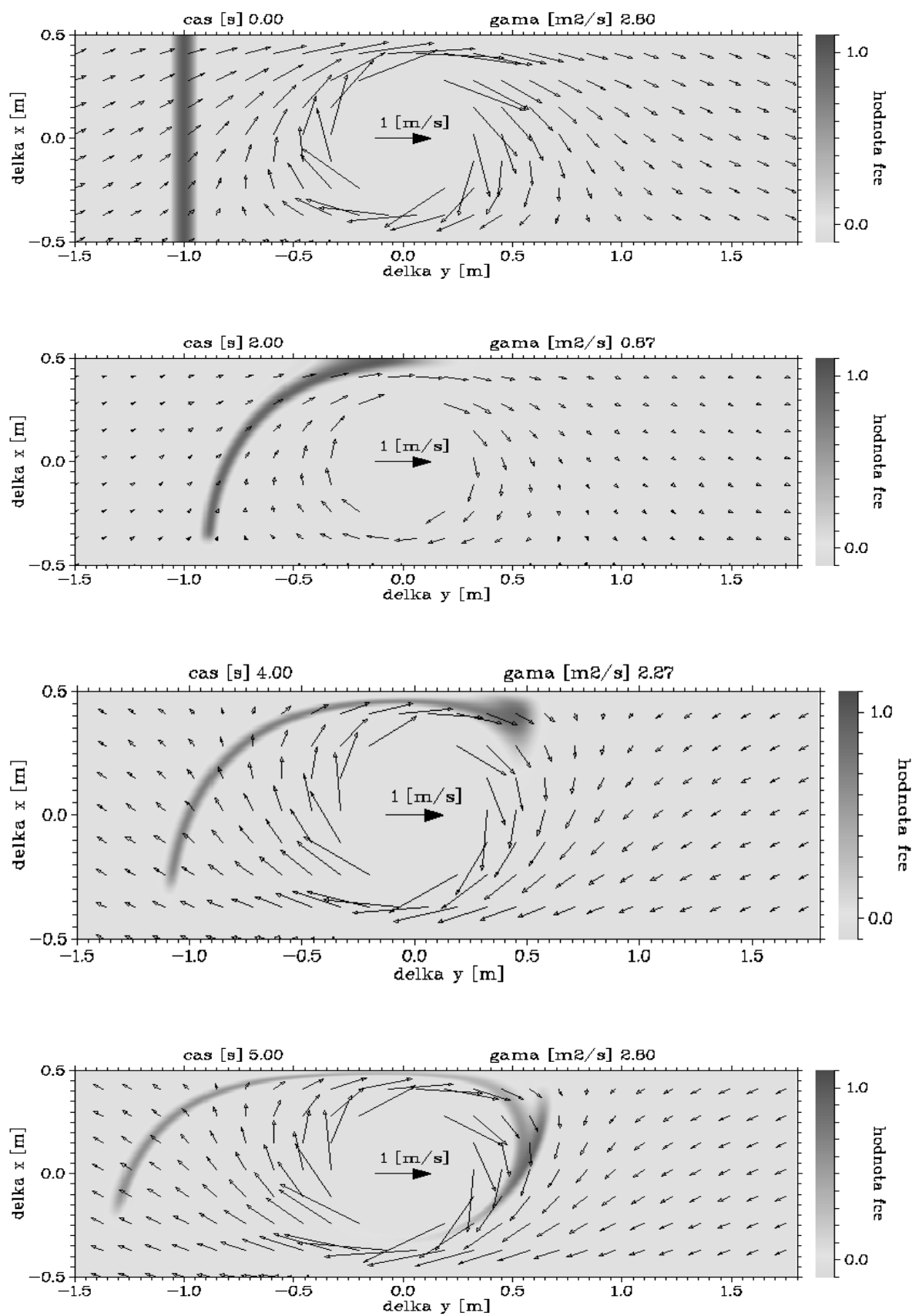
Obr 4.1 Řešení s nulovou vířivostí v časech 0 až 5 s.

Obr. 4.2 zachycuje sekvenci řešení při konstantní vířivosti $\Gamma = 2.8 \text{ m/s}^2$. Singularita ve středu víru byla nahrazena jádrem, které nijak neovlivní přesnost řešení, na obrázcích není zobrazeno z důvodu větší přehlednosti. Z časového průběhu je patrný posun hmoty vlivem urychlení částic v horní části kanálu.



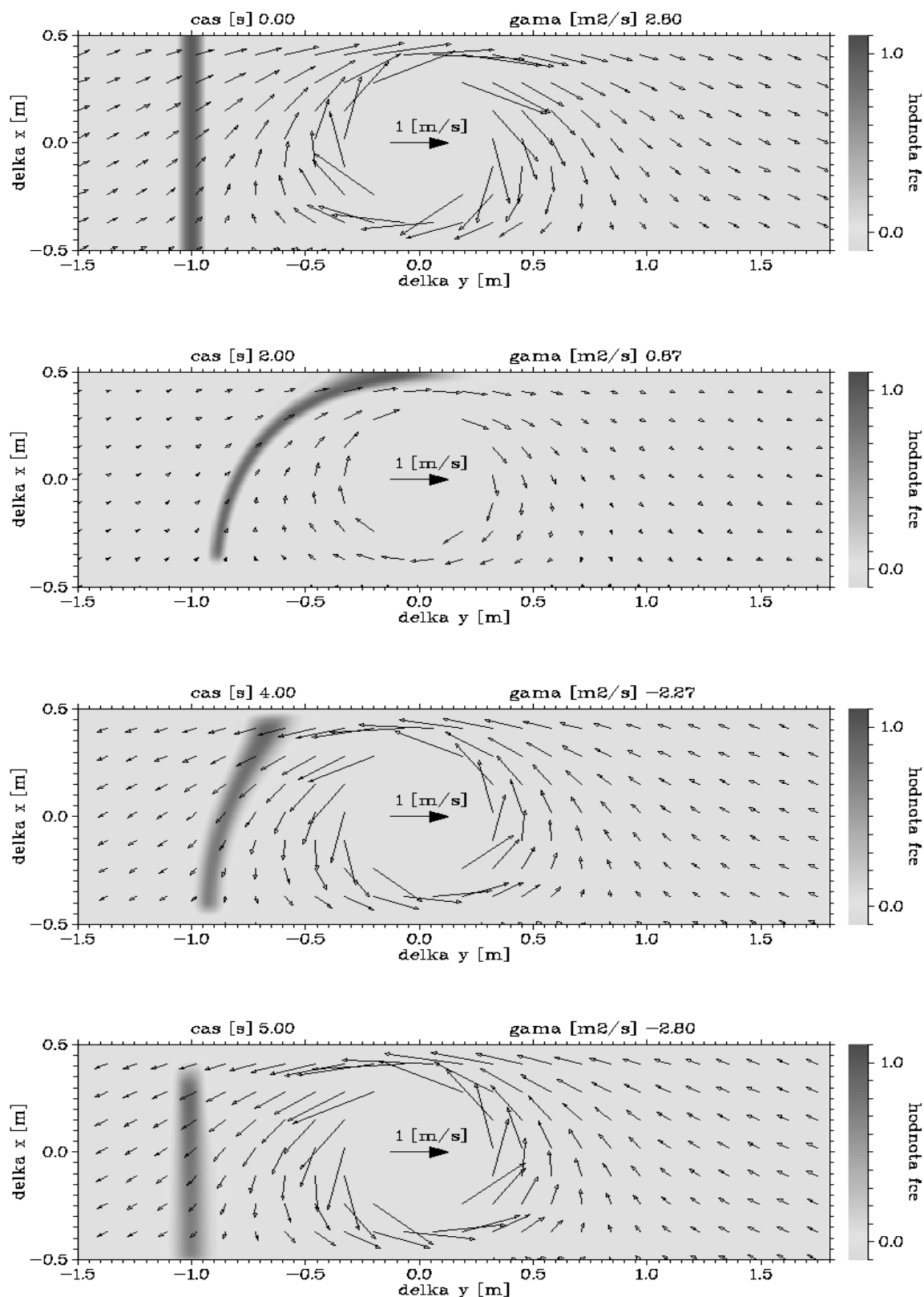
Obr. 4.2 Řešení s vířivostí $\Gamma = 2.8 \text{ m/s}^2$ v časech 0 až 5 s.

Obr. 4.3 zachycuje řešení s proměnnou vířivostí $\Gamma(t) = |2.8 \cos(2\pi ft)|$ klesající a stoupající v závislosti na axiální rychlosti proudění. Také zde dochází k posunu hmoty vlivem vířivosti.



Obr. 4.3 Řešení s vířivostí $\Gamma = |2.8 \cos(2\pi ft)|$ v časech 0 až 5 s.

Obr. 4.4 zachycuje sekvenci s proměnnou vířivostí $\Gamma(t) = 2.8\cos(2\pi ft)$ klesající a stoupající v závislosti na axiální rychlosti proudění a zároveň měnící se změnou směru rychlosti i smysl otáčení víru. V důsledku toho se puls vrátí na konci periody přibližně na výchozí úroveň.



Obr. 4.4 Řešení s vířivostí $\Gamma = 2.8 \cos(2\pi ft)$ v časech 0 až 5 s.

5 Závěr

Byl prokázán vliv vířivosti na přenos pasivního skaláru v oscilačním proudění. Dosažené výsledky jsou v souladu s předpoklady i experimentem. Jak bylo ukázáno na obr. 4.1 v případě bez separace a vířivosti dochází k minimálnímu přenosu podél kanálu zatím co v případě s konstantní vířivostí obr. 4.2 dojde ke znatelnému posunu pulsu za dobu jedné periody, což umožní v dalších cyklech posunutí až k protilehlé straně zobrazované oblasti. K podobnému efektu dochází i v dalším případě s proměnnou vířivostí obr. 4.3, naproti tomu v případě reverzního proudění obr. 4.4 nedojde ke znatelnému posunu pulsu podél kanálu. Další studie se budou zabývat kvantifikací tohoto jevu s cílem dosáhnout lepšího přiblížení realitě.

6 Literatura

- [1] Vališová K., Knob M., Adamec J.: Vliv vířivosti na přenos pasivního skaláru v oscilačním proudění, Colloquium FLUID DYNAMICS 2005, Praha
- [2] Mochizuki S., Togashi Y., Murata A.: Visualization of Axial Mass Transport in Reciprocating Flow inside Branching Tube System, Proc. Of the 3rd Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing, 2001
- [3] Vališová K., Mochizuki S., Adamec J.: Experimentální studie proudění v modelu dýchacích cest, Fluid Mechanics and Thermodynamics, Proceedings of Students' Work in the Year 2002/2003
- [4] Moin P.: Fundamentals of Engineering Numerical Analysis, Cambridge University Press, 2001
- [5] You D.: A high order Padé ADI method for unsteady convection-diffusion equations, Center for Turbulence Research, 2005